
Analytische und Numerische Untersuchung von Elektrostatischen Quadrupolaren Pick-ups

Zur Erlangung des akademischen Grades Doktor-Ingenieur (Dr.-Ing.)
genehmigte Dissertation von Dipl.-Ing. Joel Alain Tsemo Kamga aus Douala,
Kamerun
2015 — Darmstadt — D 17



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Fachbereich Elektrotechnik und Infor-
mationstechnik
Institut für Theorie Elektromagnetischer
Felder (TEMF)

Analytische und Numerische Untersuchung von Elektrostatischen Quadrupolaren Pick-ups

Genehmigte Dissertation von Dipl.-Ing. Joel Alain Tsemo Kamga aus Douala, Kamerun

1. Gutachten: Prof. Dr.-Ing. Thomas Weiland
2. Gutachten: Prof. Dr.-Ing. Harald Klingbeil

Tag der Einreichung: 12. Februar 2015

Tag der Prüfung: 11. Mai 2015

Darmstadt — D 17

Bitte zitieren Sie dieses Dokument als:

URN: [urn:nbn:de:tuda-tuprints-45807](http://nbn:de:tuda-tuprints-45807)

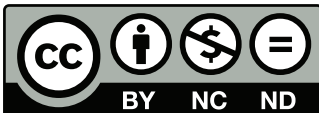
URL: <http://tuprints.ulb.tu-darmstadt.de/4580>

Dieses Dokument wird bereitgestellt von tuprints,

E-Publishing-Service der TU Darmstadt

<http://tuprints.ulb.tu-darmstadt.de>

tuprints@ulb.tu-darmstadt.de



Die Veröffentlichung steht unter folgender Creative Commons Lizenz:

Namensnennung – Keine kommerzielle Nutzung – Keine Bearbeitung 3.0 Deutschland

<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/3.0/de/>

Kurzfassung

Die vorliegende Arbeit befasst sich mit der analytischen und numerischen Untersuchung von elektrostatischen quadrupolaren Pick-ups. Diese Pick-ups bezeichnen in der Beschleunigerphysik Sensoren, die sensitiv in Bezug auf das zweite Moment ($\sigma_x^2 - \sigma_y^2$) eines elektrisch geladenen Teilchenstrahls sind und werden in der Strahldiagnostik unter anderem für die Bestimmung der transversalen Strahlemittanz mit Hilfe der Messung von $\sigma_x^2 - \sigma_y^2$ verwendet.

Die zwei bekanntesten Signalverarbeitungsmethoden zur Bestimmung des quadrupolaren Signals und somit des zweiten Moments des Strahls sind die *difference over sum*- und die *log ratio*-Methode. Das quadrupolare Signal, erhalten aus diesen beiden grundlegenden Methoden, hängt nicht nur von der zu messenden Größe $\sigma_x^2 - \sigma_y^2$, sondern auch von der Strahlposition ab. Um diese Komponenten mit hinreichender Genauigkeit separieren zu können, muss die Strahlablage so klein sein, dass die Linearität des dipolaren Signals in Bezug auf die Strahlposition gewährleistet ist.

Das wesentliche Ziel der vorliegenden Arbeit besteht darin, ein Verfahren zur Bestimmung des quadrupolaren Signals zu entwickeln, mit dem auch für große Werte der Strahlposition das zweite Moment des Strahls mit einer angemessenen Genauigkeit bestimmt werden kann. Die in dieser Arbeit entwickelte Methode wird an verschiedenen Pick-up-Designs getestet und mit den oben erwähnten traditionellen Methoden verglichen.

Darüber hinaus werden verschiedene Pick-up-Modelle, die bis jetzt als Strahlpositionsmonitore eingesetzt wurden, numerisch untersucht, um herauszufinden, ob sie als quadrupolare Pick-ups verwendet werden können.

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung	5
1.1. Motivation und Einordnung der Arbeit	5
1.2. Anwendungen	6
1.3. Übersicht	9
2. Teilchendynamik und -beschleunigung	10
2.1. Eigenschaften von elektrisch geladenen Teilchen	10
2.2. Newtonsches Bewegungsgesetz	11
2.3. Grundlagen der Teilchenbeschleunigung	13
2.3.1. Prinzip der Teilchenbeschleunigung	13
2.3.2. Linearbeschleuniger	15
2.3.3. Kreisbeschleuniger	18
2.4. Strahlprofil und Strahldimension	21
2.5. Transversale Bahndynamik in Kreisbeschleunigern	24
2.5.1. Gleichgewichtsbahn und Koordinatensystem	24
2.5.2. Hill'sche Differentialgleichung	25
2.5.3. Transversale Strahlemittanz	26
3. Multipol-Analyse von elektromagnetischen Feldern erzeugt von einem Teilchenstrahl	30
3.1. Elektrisches Feld	30
3.2. Magnetisches Feld	33
4. Verschiedene Arten von quadrupolaren Pick-ups	35
4.1. Elektrostatische Pick-ups	35
4.1.1. Funktionsweise	35
4.1.2. Herleitung der Signale am Ausgang der Elektroden	37
4.1.3. Berechnung der Kapazität C_{quad} eines quadrupolaren Pick-up	41
4.1.4. Frequenzverhalten eines kapazitiven Pick-up	44
4.1.4.1. Herleitung der gesamten Transferimpedanz einer Platte	44
4.1.4.2. Berechnung der Transferimpedanz des quadrupolaren Pick-up	46

4.2. Magnetische Pick-ups	48
4.3. Stripline	50
5. Methoden zur Messung des quadrupolaren Moments eines Teilchenstrahls	51
5.1. Grundlegende Verfahren	51
5.1.1. Difference over sum	51
5.1.1.1. Beschreibung und praktische Realisierung der Methode	51
5.1.1.2. Analytische Bestimmung von $\sigma_x^2 - \sigma_y^2$	52
5.1.2. Log ratio	54
5.1.2.1. Beschreibung und praktische Realisierung der Methode	54
5.1.2.2. Analytische Bestimmung von $\sigma_x^2 - \sigma_y^2$	55
5.2. Modifizierte log ratio-Methode	59
5.2.1. Beschreibung des Verfahrens	59
5.2.2. Analytische Bestimmung von $\sigma_x^2 - \sigma_y^2$	60
5.2.3. Optimierung des Verfahrens	67
6. Simulationen und Ergebnisse	80
6.1. Einleitung zur 3D-Simulationssoftware CST	80
6.1.1. CST EM Studio	80
6.1.2. CST Particle Studio	81
6.2. Simulationen ohne äußere Beschaltung	82
6.2.1. Symmetrisches kreisförmiges Pick-up	82
6.2.2. Asymmetrisches Pick-up	87
6.2.2.1. Bestimmung der Pick-up-Eigenschaften	87
6.2.2.2. Untersuchung des Frequenzverhaltens des Pick-up	99
6.2.3. Shoe-Box BPM	106
6.3. Untersuchung des Frequenzverhaltens eines realen Verstärkers	108
7. Zusammenfassung und Ausblick	112
7.1. Zusammenfassung	112
7.2. Ausblick	115
A. Anhang	116
A.1. Sensitivitätsberechnung mit der Methode der linearen Regression	116
A.1.1. Quadrupolare Sensitivität	116
A.1.2. Dipolare Sensitivität	117



A.2. Numerische Berechnung der Gewichtungsfaktoren	120
A.3. Anwendung der <i>modifizierte log ratio</i> -Methode auf ein magnetisches Pick-up	122
A.3.1. Analytische Berechnung des quadrupolaren Signals bzw. Mo- ments	122
A.3.2. Vergleich der Signalverarbeitungsmethoden	128
Symbolverzeichnis	131
Literaturverzeichnis	134
Danksagung	140

1 Einleitung

1.1 Motivation und Einordnung der Arbeit

Quadrupolare Pick-ups sind in der Beschleunigerphysik Sensoren, die sensitiv in Bezug auf das zweite Moment ($\sigma_x^2 - \sigma_y^2$) eines elektrisch geladenen Teilchenstrahls sind, wobei σ_x und σ_y die RMS-Halbbreiten des Strahls in den beiden transversalen Richtungen x und y bezeichnen. Diese Pick-ups bestehen im Allgemeinen aus vier symmetrischen metallischen Elektroden, platziert in derselben transversalen Ebene. In der Strahldiagnostik sind quadrupolare Sensoren von besonderer Bedeutung, da sie durch die Messung des zweiten Moments des Strahls die Bestimmung der transversalen Strahlemittanz ermöglichen. 1983 wurde von Roger Miller [1] eine Methode basierend auf der Multipolentwicklung eines Teilchenstrahls bzw. ein quadrupolares Pick-up bestehend aus vier symmetrischen und äquidistanten Elektroden zur Bestimmung der transversalen Emittanz eines Elektronenstrahls entwickelt und an der Forschungseinrichtung SLAC National Accelerator Laboratory im US-Bundesstaat Kalifornien erfolgreich getestet. Ebenfalls in einer in 2007 veröffentlichten Arbeit [2] wurden als Methoden zur Bestimmung des quadrupolaren Signals und somit des zweiten Moments des Strahls unter anderem die zwei grundlegenden Verfahren, nämlich die *difference over sum*- und die *log ratio*-Methode, vorgestellt.

Das aus diesen beiden Methoden erhaltene quadrupolare Signal hängt nicht nur von der zu messenden Größe $\sigma_x^2 - \sigma_y^2$, sondern auch von der Strahlposition (\bar{x}, \bar{y}) ab, wobei mit Strahlposition der Schwerpunkt des Strahls gemeint ist. Somit kann mit den oben erwähnten traditionellen Methoden das zweite Moment des Strahls erst bestimmt werden, wenn der quadratische Anteil der Strahlposition vom quadrupolaren Signal abgezogen wurde. Bei der Bestimmung der Strahlablage ist allerdings zu beachten, dass die dipolaren Signale auch sensitiv zum sextupolaren Moment des Strahls ist; dies führt dazu, dass für große Werte von \bar{x} oder \bar{y} die dipolaren Signale nicht mehr linear zur Strahlposition sind. Demzufolge kann eine angemessene Genauigkeit bei der Bestimmung von $\sigma_x^2 - \sigma_y^2$ nur erreicht werden, wenn die Strahlposition klein ist, so dass die durch das sextupolare Moment entstandenen höheren Ordnungsterme gegenüber der zu messenden Größe vernachlässigbar sind [1, 2].

Das wesentliche Ziel der vorliegenden Arbeit besteht darin, ausgehend von Millers Idee [1] und der *log ratio*-Methode, beschrieben in [2], ein Verfahren zur Bestimmung des quadrupolaren Signals und somit des zweiten Moments des Strahls, mit dem auch für große Werte von \bar{x} oder \bar{y} sowohl der quadratische Term der Strahlposition als auch die höheren Ordnungsterme so stark wie möglich reduziert werden, zu entwickeln. Diese entwickelte Signalverarbeitungsmethode wird *modifizierte log ratio* genannt.

Darüber hinaus werden im zweiten Teil dieser Arbeit verschiedene Pick-up-Modelle, unter anderem der im SIS-18 der GSI installierte asymmetrische Strahlpositionsmontitor [4] und der Shoe-Box BPM [5], numerisch mit den elektromagnetischen Feldsimulatoren CST EM Studio und CST Particle Studio [3] untersucht. Diese beiden Pick-ups wurden bis jetzt zur Bestimmung der Strahlablage verwendet und dafür konstruiert und würden in Zukunft als quadrupolare Pick-ups zur Beobachtung der Strahlbreitenschwingungen eingesetzt werden. Zu diesem Zweck sollen diese GSI-Strukturen mit den oben erwähnten elektromagnetischen Feldsimulationsprogramme simuliert und dann, wenn möglich, so charakterisiert werden, dass sie als quadrupolare Sensoren betrieben werden können. Mit anderen Worten, wenn anhand der Simulationsergebnisse festgestellt wird, dass diese Strahlpositionsmontitore sensitiv in Bezug auf das quadrupolare Signal sind, werden dann deren Eigenschaften, unter anderem die Pick-up-Sensitivität, bestimmt werden. Anschließend werden auch die Ergebnisse der Feldsimulatoren CST EM Studio und CST Particle Studio miteinander verglichen werden. Weiterhin wird die *modifizierte log ratio*-Methode an dem im SIS-18 der GSI angebauten asymmetrischen Pick-up getestet und deren Ergebnisse werden mit denen üblicher Signalverarbeitungsmethoden verglichen.

1.2 Anwendungen

Quadrupolare Pick-ups finden Anwendung in mehreren Bereichen der Beschleunigerphysik, unter anderem bei der Messung der Strahlemittanz, der Energieverteilung in Kreisbeschleunigern sowie bei der Beobachtung der Strahlbreitenschwingungen (*Beam size oscillations*) in Ringbeschleunigern, welche im Laufe dieses Abschnittes mathematisch gezeigt werden.

Zunächst betrachten wir die Signalkomponenten des mit einem quadrupolaren Pick-up gemessenen quadrupolaren Moments $\sigma_x^2 - \sigma_y^2$, welches durch folgende Gleichung [6] beschrieben wird.

$$\kappa = \sigma_x^2 - \sigma_y^2 + \bar{x}^2 - \bar{y}^2 \quad (1.1)$$

$$= \epsilon_x \beta_x - \epsilon_y \beta_y + \sigma_p^2 D_x^2 - \sigma_p^2 D_y^2 + \bar{x}^2 - \bar{y}^2 \quad (1.2)$$

$$\Rightarrow \sigma_x^2 - \sigma_y^2 = \underbrace{\epsilon_x \beta_x - \epsilon_y \beta_y}_B + \underbrace{\sigma_p^2 D_x^2 - \sigma_p^2 D_y^2}_D, \quad (1.3)$$

wobei ϵ_x und ϵ_y die Komponenten der Strahlemittanz in den beiden transversalen Richtungen x und y bezeichnen. Die Bedeutung der anderen Parameter bzw. Symbole in den obigen Gleichungen wird im Abschnitt 2.5 sowie im Symbolverzeichnis erläutert.

Im Dispersionsfreien Fall, d.h. wenn der Term D in Gl. (1.3) gleich Null ist, und angenommen, dass der Anteil der Strahlposition $(\bar{x}^2 - \bar{y}^2)$ vom quadrupolaren Signal erfolgreich abgezogen wurde, dann erhält man

$$\sigma_x^2 - \sigma_y^2 = \epsilon_x \beta_x - \epsilon_y \beta_y. \quad (1.4)$$

Gleichung (1.4) zeigt, dass durch die Messung von $\sigma_x^2 - \sigma_y^2$ die durch ϵ_x und ϵ_y beschriebene Strahlemittanz bestimmt werden kann. Dies wurde zum ersten mal in 1983 von R. Miller [1] am SLAC National Accelerator Laboratory im US-Bundesstaat Kalifornien experimentell durchgeführt, indem er mithilfe von Stripline-Pick-ups im LINAC das quadrupolare Signal maß und daraus das quadrupolare Moment eines Elektronenstrahls bestimmte. Die Millers Methode lässt sich grob wie folgt erklären: stellen wir zunächst die Betatronfunktion β an einer beliebigen Stelle s im LINAC als Funktion der Twiss-Parameter $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$ an einer Referenzstelle s_0 dar [6]:

$$\beta = C^2 \beta_0 - 2SC\alpha_0 + S^2\gamma_0, \quad (1.5)$$

wobei S und C die Komponenten der Transfermatrix von der Referenzstelle s_0 zu einer beliebigen Stelle s sind. Ersetzt man β in Gleichung (1.4) durch die Beziehung (1.5), so erhält man

$$\begin{aligned} \sigma_x^2 - \sigma_y^2 = & C_x^2(\beta_{x0} \cdot \epsilon_x) - 2S_x C_x(\alpha_{x0} \cdot \epsilon_x) + S_x^2(\gamma_{x0} \cdot \epsilon_x) \\ & - C_y^2(\beta_{y0} \cdot \epsilon_y) + 2S_y C_y(\alpha_{y0} \cdot \epsilon_y) - S_y^2(\gamma_{y0} \cdot \epsilon_y). \end{aligned} \quad (1.6)$$

Man sieht anhand der Gleichung (1.6), dass mithilfe von sechs quadrupolaren Pick-ups, platziert an strategischen Stellen im LINAC, die sechs Terme $(\beta_{x0} \cdot \epsilon_x)$,

$(\alpha_{x0} \cdot \epsilon_x)$, $(\gamma_{x0} \cdot \epsilon_x)$, $(\beta_{y0} \cdot \epsilon_y)$, $(\alpha_{y0} \cdot \epsilon_y)$ und $(\gamma_{y0} \cdot \epsilon_y)$ bestimmt werden können. Aus diesen Werten können die transversalen Komponenten ϵ_x und ϵ_y der Strahl-
emittanz erhalten werden. Hierbei ist zu beachten, dass S und C in Gl. (1.6) die
Komponenten der Transfermatrix von der Referenzstelle s_0 zu den Pick-up-Stellen
bezeichnen.

Weitere Details zur Messung der Emittanz mithilfe eines quadrupolaren Pick-up
können in [1, 6, 8, 9] nachgelesen werden.

Wenn in einem Kreisbeschleuniger wie zum Beispiel dem SIS (SchwerIonenSyn-
chrotron) bei der GSI die Strahlposition und die Strahlenvelope aufgrund der
Fehlanpassung bei der Strahlinjektion schwingen, dann wird κ in Gl. (1.1) zeitab-
hängig [10]

$$\kappa(t) = \sigma_x^2(t) - \sigma_y^2(t) + x^2(t) - y^2(t). \quad (1.7)$$

Angenommen, dass die Anfangswerte der Schwingungsamplituden der Strahlposi-
tion durch a_x und a_y und die der Strahleinhüllende oder Strahlenvelope durch
 a_{xx} und a_{yy} gegeben sind, lässt sich die Zeitabhängigkeit der Strahlposition und
Strahlbreite wie folgt schreiben [10]:

$$\begin{aligned} \sigma_x(t) &= \sigma_x + a_{xx} \cos(2\pi Q_{coh,1} t), \\ \sigma_y(t) &= \sigma_y + a_{yy} \cos(2\pi Q_{coh,2} t), \\ x(t) &= \bar{x} + a_x \cos(2\pi Q_x t), \\ y(t) &= \bar{y} + a_y \cos(2\pi Q_y t). \end{aligned} \quad (1.8)$$

Hierbei bezeichnen Q_x und Q_y die Betatronfrequenzen bezüglich der x - und y -
Ebenen. $Q_{coh,1}$ und $Q_{coh,2}$ sind die kohärenten Frequenzen der Strahleinhüllende-
Schwingungen. Nun wird Gl. (1.8) in Gl. (1.7) eingesetzt und unter Vernachlässi-
gung der zweiten Ordnungsterme $a_{xx}^2 \cos^2(2\pi Q_{coh,1} t)$ und $a_{yy}^2 \cos^2(2\pi Q_{coh,2} t)$
ergibt

$$\begin{aligned} \kappa(t) &= \sigma_x^2 + 2\sigma_x a_{xx} \cos(2\pi Q_{coh,1} t) - \sigma_y^2 - 2\sigma_y a_{yy} \cos(2\pi Q_{coh,2} t) \\ &\quad + \bar{x}^2 + 2\bar{x} a_x \cos(2\pi Q_x t) + \frac{a_x^2}{2} [1 + \cos(2\pi 2Q_x t)] \\ &\quad - \bar{y}^2 - 2\bar{y} a_y \cos(2\pi Q_y t) - \frac{a_y^2}{2} [1 + \cos(2\pi 2Q_y t)]. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Die kohärenten Frequenzen $Q_{coh,1}$ und $Q_{coh,2}$ sind gegeben durch [11, 12]

$$\begin{aligned} Q_{coh,1} &= 2Q_{0,x} - \frac{1}{2} \left(3 - \frac{\sigma_x}{\sigma_x + \sigma_y} \right) \Delta Q_{inc,x} , \\ Q_{coh,2} &= 2Q_{0,y} - \frac{1}{2} \left(3 - \frac{\sigma_y}{\sigma_x + \sigma_y} \right) \Delta Q_{inc,y} . \end{aligned} \tag{1.10}$$

In Gl. (1.10) stehen $Q_{0,x}$ und $Q_{0,y}$ für die Betatronfrequenzen in Abwesenheit von Raumladungen und $\Delta Q_{inc,y}$ ist die Verschiebung der inkohärenten Betatronschwingungen [11].

Mit Gl. (1.9) ist ganz deutlich zu sehen, dass bei der Messung des quadrupolaren Signals, welches näherungsweise proportional zu κ ist (siehe Gl. (5.2)), Strahlbreitenschwingungen (*Beam size oscillations*) beobachtet bzw. analysiert werden können. Aus diesen Schwingungen können Informationen zur Fehlanpassung bei der Strahlinjektion gewonnen werden [7], was eine weitere Anwendung von quadrupolaren Pick-ups ist.

1.3 Übersicht

Die vorliegende Arbeit besteht aus sieben Kapiteln. Teilchendynamik und Teilchenbeschleunigung werden im zweiten Kapitel ausführlich beschrieben.

Kapitel 3 widmet sich der Multipol-Analyse von elektromagnetischen Feldern erzeugt von einem Teilchenstrahl. Hier werden, ausgehend von einer elektrisch langen Linienladungsverteilung an einer beliebigen Stelle im Inneren eines leitenden Strahlrohres, die den Teilchenstrahl begleitenden elektromagnetischen Felder hergeleitet.

Die verschiedenen Arten von quadrupolaren Pick-ups werden Bestandteil des Kapitels 4 sein, wobei mehr Akzent auf elektrostatische Pick-ups gelegt werden wird.

Die in dieser Arbeit entwickelte Methode wird, wie schon im ersten Abschnitt dieses Kapitels erwähnt, *modifizierte log ratio* genannt und im Abschnitt 5.2 des Kapitels 5 ausführlich beschrieben. Zuvor werden im selben Kapitel die grundlegenden Signalverarbeitungsmethoden, nämlich die *difference over sum*- und die *log ratio*-Methode, erläutert.

Bevor die Arbeit mit einer Zusammenfassung und einem Ausblick abgeschlossen wird, werden im Kapitel 6 die Simulationsergebnisse von drei Pick-up-Modellen und deren Interpretation vorgestellt.

2 Teilchendynamik und -beschleunigung

Teilchendynamik ist in der Beschleunigerphysik von zentraler Bedeutung, weil die Nutzung der Antwort von elektrisch geladenen Teilchen auf die elektromagnetischen Kräfte die Grundlage der Partikeloptik und der Beschleunigungstheorie ist. Im ersten Teil dieses Kapitels wird die Wechselwirkung zwischen Partikeln, deren Eigenschaften im Abschnitt 2.1 ausführlich beschrieben werden, und allgemeinen Kräften erläutert. Anschließend wird auf die Beschreibung des Strahlprofils sowie der transversalen Strahlemittanz eingegangen. Es wird in dieser Arbeit überwiegend über Elektronen und Ionen gesprochen.

2.1 Eigenschaften von elektrisch geladenen Teilchen

Ein elektrisch geladenes Teilchen ist definitionsgemäß ein Teilchen, das eine elektrische Ladung trägt. Das leichteste und bekannteste der elektrisch geladenen Elementarteilchen ist das Elektron, welches eine negative Ladung trägt. Elektronen können aufgrund ihrer geringen Masse auf eine Geschwindigkeit von nahezu 300.000 km/s (Lichtgeschwindigkeit) beschleunigt werden. Bei einer kinetischen Energie von 2 MeV zum Beispiel ergibt sich gemäß Gl. (2.3) eine normierte Elektronengeschwindigkeit β gleich 0.979, was einer Abweichung von der Lichtgeschwindigkeit nur noch von 2.1 % entspricht.

Ein Ion ist eine Ansammlung von Protonen, Neutronen und Elektronen. Ein Atom oder Molekül wird als Ion bezeichnet, wenn es ein oder mehrere Elektronen weniger oder mehr als im Neutralzustand besitzt.

Eigenschaften einiger elektrisch geladener Teilchen sind in der Tabelle 2.1 zusammengefasst. Die Ruheenergie E_0 eines Teilchens ist wie folgt definiert [13]:

$$E_0 = m_0 \cdot c^2, \quad (2.1)$$

wobei m_0 die Ruhemasse des Teilchens ist und c die Lichtgeschwindigkeit. Die Energie wird oft in eV (Elektronenvolt) angegeben, wobei ein Elektronenvolt die Ener-

gie darstellt, die ein Elektron besitzt, wenn es mit einem Volt beschleunigt wurde. Die Gesamtenergie E eines Teilchens ist gegeben durch [13]

$$E = \frac{m_0 \cdot c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} . \quad (2.2)$$

v in Gl. (2.2) bezeichnet die Teilchengeschwindigkeit.

Teilchen	Ladung (C)	Masse (kg)	Ruheenergie (MeV)
Elektron	$- 1,602 \cdot 10^{-19}$	$9,11 \cdot 10^{-31}$	0,511
Positron	$+ 1,602 \cdot 10^{-19}$	$9,11 \cdot 10^{-31}$	0,511
Proton	$+ 1,602 \cdot 10^{-19}$	$1,67 \cdot 10^{-27}$	938
Ion; z.B: He^+	$+ 1,602 \cdot 10^{-19}$	$6,64 \cdot 10^{-27}$	3728

Tabelle 2.1.: Eigenschaften einiger elektrisch geladener Teilchen [14, 15].

Da die Gesamtenergie E eines Teilchens die Summe aus Ruheenergie und kinetischer Energie ist, ergibt sich dann die kinetische Energie E_{kin} eines Teilchens wie folgt:

$$\begin{aligned}
 E_{kin} &= E - E_0 \\
 &= \frac{m_0 \cdot c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - m_0 \cdot c^2 \\
 &= \frac{m_0 \cdot c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} - m_0 \cdot c^2 , \quad (2.3)
 \end{aligned}$$

wobei β die normierte Teilchengeschwindigkeit ist und in der Beschleunigerphysik öfter als v verwendet wird.

2.2 Newtonsches Bewegungsgesetz

Die Stärke der Wechselwirkung zwischen Teilchen und elektromagnetischen Feldern wird durch die Ladung des Teilchens bestimmt. Das Verhalten eines Teilchens

wird durch dessen Position im dreidimensionalen Raum sowie dessen Geschwindigkeit als Funktion der Zeit t beschrieben. Die Positions- und Geschwindigkeitsvektoren eines Teilchens sind in Abb. 2.1 dargestellt. Das Wort *Particle* im Bild bedeutet Teilchen auf Englisch.

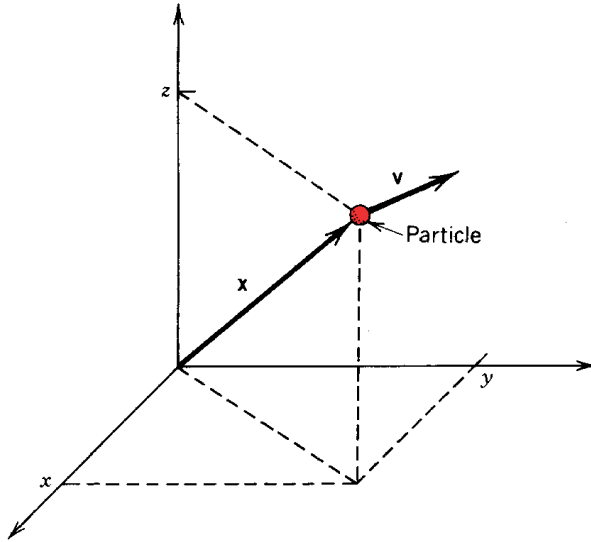


Abbildung 2.1.: Positions- und Geschwindigkeitsvektoren eines Teilchens im kartesischen Koordinatensystem [14].

Der Positionsvektor \mathbf{x} kann folgendermaßen geschrieben werden

$$\mathbf{x} = (x, y, z) . \quad (2.4)$$

Die Teilchengeschwindigkeit, welche ebenfalls ein Vektor ist, lässt sich darstellen als

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= (v_x, v_y, v_z) \\ &= (dx/dt, dy/dt, dz/dt) \\ &= d\mathbf{x}/dt . \end{aligned} \quad (2.5)$$

Das erste Newtonsche Bewegungsgesetz besagt, dass ein Körper im Zustand der Ruhe oder der gleichförmigen Translation verharrt, sofern er nicht durch einwirkende Kräfte zur Änderung seines Zustands gezwungen wird. Mit anderen Worten, der Impuls $\vec{p} = m\vec{v}$ des Teilchens bleibt unverändert. Dem zweiten Newtonschen Bewegungsgesetz zufolge ist die auf einen Körper der Masse m wirkende gesamte äußere Kraft \vec{F} gleich der zeitlichen Änderung seines Impulses.

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} . \quad (2.6)$$

Für den Fall einer konstanten Masse m , wird Gl. (2.6)

$$\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a} , \quad (2.7)$$

wobei \vec{a} die Beschleunigung des Körpers ist.

Im kartesischen Koordinatensystem kann Gl. (2.7) auch wie folgt geschrieben werden.

$$F_x = ma_x , \quad F_y = ma_y , \quad F_z = ma_z , \quad (2.8)$$

wobei (F_x, F_y, F_z) die Komponenten der Vektorkraft \vec{F} und (a_x, a_y, a_z) die der Beschleunigung \vec{a} sind. Gl. (2.8) ist der Ausgangspunkt für die Beschleunigung von elektrisch geladenen Teilchen, wobei zu beachten ist, dass bei der Beschleunigung die Gesamtmasse m des Teilchens mit der zunehmenden Geschwindigkeit größer wird

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} . \quad (2.9)$$

Demzufolge ist die Gesamtmasse m nur bei geringen Werten der Teilchengeschwindigkeit ($\beta \ll 1$) gleich der konstanten Ruhemasse m_0 .

2.3 Grundlagen der Teilchenbeschleunigung

2.3.1 Prinzip der Teilchenbeschleunigung

Die Kräfte, die für die Beschleunigung und Ablenkung geladener Teilchen verantwortlich sind, ergeben sich aus der Wechselwirkung mit elektrischen und magnetischen Feldern. Die Lorentzkraft \vec{F}_L , beschrieben durch Gl. (2.10), ist die zentrale Gleichung der Beschleunigerphysik.

$$\vec{F}_L = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) . \quad (2.10)$$

Hierbei steht q für die Ladung und \vec{v} für die Geschwindigkeit des geladenen Teilchens. \vec{E} bezeichnet die elektrische Feldstärke und \vec{B} die magnetische Induktion an der momentanen Position des Teilchens. Die Feldgrößen \vec{E} und \vec{B} sind orts- und zeitabhängig. Während bei einfachen Teilchen wie z.B. Protonen und Positronen die Ladung q gleich der Elementarladung $e = 1.602 \cdot 10^{-19}$ C ist, hängt hingegen bei schweren Ionen die Ladungszahl von dem Ionisationszustand ab.

Kreisförmig abgelenkte Teilchen werden durch Kräfte, die senkrecht zur momentanen Geschwindigkeit \vec{v} wirken, erzeugt. Der Betrag der Geschwindigkeit $|\vec{v}|$ bleibt dabei unverändert und ebenso die kinetische Energie. Die Geschwindigkeit \vec{v} und damit die kinetische Energie eines Teilchens wird geändert, wenn Kräfte parallel zur momentanen Geschwindigkeit \vec{v} wirken. Da die Kräfte, die durch die magnetische Flussdichte \vec{B} erzeugt werden, senkrecht zu \vec{v} stehen, können sie dementsprechend nur zur Ablenkung und Fokussierung der Teilchen verwendet werden. Teilchen werden im Sinne einer Änderung der kinetischen Energie nur mithilfe der elektrischen Feldstärke \vec{E} beschleunigt, weil sich die kinetische Energie, wie zuvor erwähnt, nur ändert, wenn Kräfte parallel zu \vec{v} wirken.

Die Änderung ΔE der kinetischen Energie und damit auch der Gesamtenergie auf dem Weg von r_1 nach r_2 erhält man aus dem Wegintegral [16]

$$\begin{aligned} \Delta E &= E(r_1) - E(r_2) \\ &= \int_{r_1}^{r_2} \vec{F}_L \cdot d\vec{r} \\ &= \int_{r_1}^{r_2} q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{r} \\ &= \int_{r_1}^{r_2} q(\vec{E} \cdot d\vec{r}) + \underbrace{\int_{r_1}^{r_2} q(\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{r}}_{=0} \\ &= \int_{r_1}^{r_2} q\vec{E} \cdot d\vec{r} . \end{aligned} \quad (2.11)$$

Das Skalarprodukt $(\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{r}$ verschwindet, da bei der Integration das Wegelement $d\vec{r}$ stets senkrecht zu $\vec{v} \times \vec{B}$ ist. Gl. (2.11) bedeutet, dass nur die Komponente

Der in Abb. 2.2 dargestellte Wideröe-Beschleuniger setzt sich aus vielen rohrförmigen Elektroden zusammen, den Driftröhren, die entlang einer geraden Achse angeordnet sind. Diese werden abwechselnd auf ein positives und negatives elektrisches Potential gebracht. Aufgrund der Tatsache, dass sich die Driftröhren selbst wie ein Faradayscher Käfig verhalten, besteht in ihrem Inneren kein elektrisches Feld. Demzufolge fliegt dort das Teilchen mit konstanter Geschwindigkeit und wird von einer angelegten Spannung nicht beeinflusst. Im Spalt zwischen zwei benachbarten Driftröhren hingegen werden Teilchen vom elektrischen Feld beeinflusst. Sie werden dann beschleunigt, wenn das elektrische Feld im Spalt zwischen zwei benachbarten Driftröhren die Vorwärtsrichtung aufweist; bezogen auf das Bild in Abb. 2.2 muss das E-Feld im Spalt immer von links nach rechts gerichtet sein, damit die Teilchen beschleunigt werden. Ein solches elektrisches Wechselfeld wird durch eine Wechselspannungsquelle passender Frequenz, einen hochfrequenten Generator, erzeugt. Die Länge der Röhre muss so gewählt werden, dass die Flugzeit der Teilchen bis zum nächsten Spalt gleich der halben Periodendauer der Wechselspannung ist. Da die kinetische Energie E_{kin} und somit die Geschwindigkeit der Teilchen durch jeden Beschleunigungsschritt zunimmt, die Zeit für die Umpolung aber unverändert bleibt, muss dementsprechend die Länge der einzelnen Driftröhren entsprechend anwachsen, wie in der Abbildung gezeigt.

Zur Beschleunigung von Elektronen, Protonen und schweren Ionen werden je nach der Geschwindigkeit der Teilchen unterschiedliche hochfrequente Strukturen eingesetzt [17]:

- Wideröe-Struktur ($\beta \approx 0.005 - 0.05$)
- RFQ-Struktur ($\beta \approx 0.005 - 0.05$)
- Einzelresonator ($\beta \approx 0.04 - 0.2$)
- Alvarez-Struktur ($\beta \approx 0.04 - 0.6$)
- Wellenleiter-Struktur ($\beta \approx 1$)
 - Wanderwellenbeschleuniger
 - Stehwellenstruktur

- Supraleitende Hohlraumresonatoren ($\beta \approx 1$)



Abbildung 2.3.: 1.3 GHz Tesla-Hohlraumresonator zur Beschleunigung von Elektronen und Positronen. *Quelle:* <http://newsline.linearcollider.org>.

Der gegenwärtig größte Linearbeschleuniger der Welt steht an der von der Universität Stanford in Kalifornien betriebenen Forschungseinrichtung SLAC National Accelerator Laboratory. Der Hauptbeschleuniger ist über 3 km lang und bringt Elektronen und Positronen auf bis zu 50 GeV. Ein Luftbild des Linearbeschleunigers am SLAC National Accelerator Laboratory ist in der folgenden Abbildung zu sehen.



Abbildung 2.4.: Luftaufnahme des Linearbeschleunigers am SLAC National Accelerator Laboratory [18].

Weitere Details über Linearbeschleuniger sind in [16, 25, 20] nachzulesen.

2.3.3 Kreisbeschleuniger

Ringbeschleuniger oder Kreisbeschleuniger sind laut [19] Teilchenbeschleuniger, in denen die geladenen Teilchen, im Gegensatz zu Gleichspannungs- und Linearbeschleunigern, eine mehr oder weniger 'runde' - beispielsweise annähernd spiral- oder kreisförmige - Bahn wiederholt durchlaufen. Sie werden für Elektronen und schwerere geladene Teilchen benutzt.

Der Vorteil ist, dass die Teilchen immer wieder die gleichen Beschleunigungstrecken nutzen; ein Kreisbeschleuniger ist insofern wirtschaftlicher und für hohe Endenergien platzsparender als ein vergleichbarer Linearbeschleuniger. Der Nachteil ist, dass die Teilchen bei genügend hoher Geschwindigkeit wegen der nötigen Ablenkung Synchrotronstrahlung emittieren und so Energie verlieren [19].

Bei allen Kreisbeschleunigern werden zur Führung der Teilchen Magnete verwendet, deren magnetische Feldstärke $B(r, t)$ zeitlich und räumlich variieren oder auch konstant sein kann. Teilchen werden in Ringbeschleunigern grundsätzlich mit Wechselspannungen mit konstanter oder zeitlich veränderlicher Frequenz beschleunigt.

In der folgenden Tabelle wird ein Überblick über die wichtigsten und bekanntesten Ringbeschleuniger und einige ihrer Betriebsarten gegeben.

Beschleuniger	Frequenz	Magnetfeld	Bahn
Betatron	50 Hz, const	$B(t), B(r) = \text{const}$	Kreis
Zyklotron	10 - 30 MHz, const	$B(t) = B(r) = \text{const}$	Spirale
Mikrotron	2 - 3 GHz, const	$B(t) = B(r) = \text{const}$	Spirale
Synchrotron	100 MHz, const	$B(t), B(r) = \text{const}$	Kreis
	HF(t) zunehmend	$B(t), B(r) = \text{const}$	Kreis
Rhodotron	100 - 200 MHz	$B(t) = \text{const}, B(r)$	Rosette

Tabelle 2.2.: Wichtigste Kenndaten der bekanntesten Ringbeschleuniger. Die angegebenen Frequenzen sind typische Werte [20].

Der größte Kreisbeschleuniger der Welt ist der LHC (Large Hadron Collider) am CERN in Genf in der Schweiz. Er hat einen Durchmesser von 8,6 km und eine

Länge von 27 km. Ein Luftbild des Forschungszentrums CERN mit eingezeichnetem Verlauf des unterirdischen LHC-Beschleunigers ist in Abb. 2.5 zu sehen.

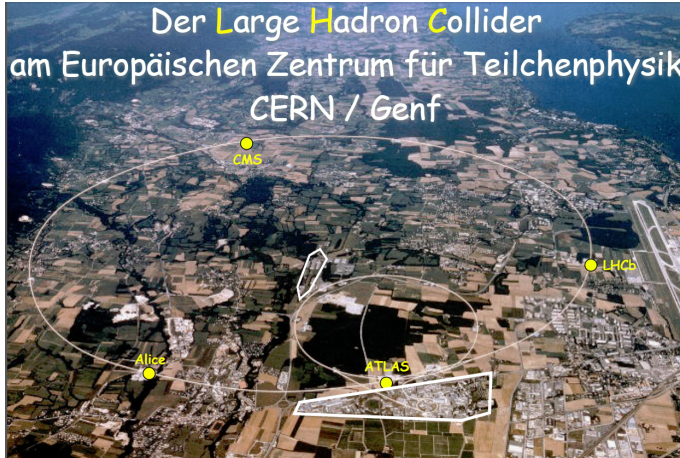


Abbildung 2.5.: Luftaufnahme des Forschungszentrums CERN mit eingezeichnetem Verlauf des unterirdischen LHC-Beschleunigers [21].

Da das im Abschnitt 6.2.2 untersuchte Pick-up in der Praxis im Schwerionen-Synchrotron SIS-18 bei der GSI (Gesellschaft für Schwerionen) eingesetzt wird, wird im Folgenden der Akzent nur auf das Synchrotron gelegt.

Das Synchrotron ist ein Kreisbeschleuniger, in dem die Teilchen viele Umläufe machen und dieselbe Laufbahn bzw. denselben Bahnkreis mit dem Radius r haben. Um das besser zu verstehen, wird der Radius r der Laufbahn in einem Zyklotron betrachtet, welcher aus [22] wie folgt definiert ist:

$$r = \frac{m \cdot v}{q \cdot B} , \quad (2.12)$$

wobei die Geschwindigkeit \vec{v} des Teilchens und das Magnetfeld \vec{B} senkrecht zueinander stehen. q steht für die Ladung der Teilchen. Anhand der Gl. (2.12) ist deutlich zu erkennen, dass bei zunehmender Energie und Geschwindigkeit v das Teilchen mit dem größten Radius r im Magnetfeld umläuft. Die Idee des Synchrotrons besteht darin, bei zunehmender Energie die Teilchenbahn mit dem Radius r konstant zu halten, indem man das Magnetfeld immer erhöht. Aus diesem Grund kann mit einem Synchrotron hohe Energie erreicht werden. Der Aufbau eines Synchrotrons ist in der folgenden Abbildung dargestellt.

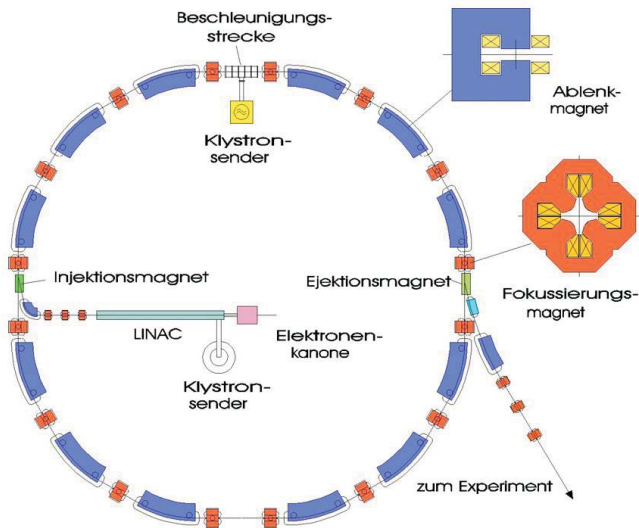


Abbildung 2.6.: Schematische Darstellung eines Synchrotrons mit Linac als Vorbeschleuniger [23].

Eine ausführliche Beschreibung eines Synchrotrons ist in mehreren Büchern zu finden, unter anderem in [16], [20] und [25].

Eine Sektornummerierung sowie eine Außenansicht des SchwerIonenSynchrotrons SIS-18 bei der GSI sind in Abb. 2.7 veranschaulicht.

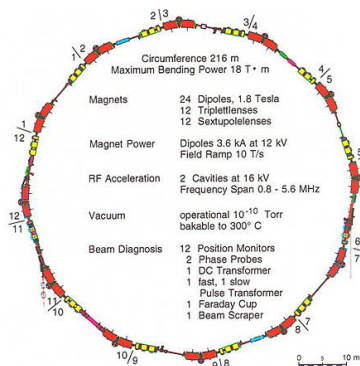


Abbildung 2.7.: Links: SchwerionenSynchrotron SIS-18 mit Sektionsbezeichnungen; rechts: Blick in den Tunnel des SIS-18 Synchrotrons [26].

Der Kreisbeschleuniger SIS-18 hat einen Umfang von 216 m und besteht aus 92 Elementen. Im SIS-18 können die aus dem Linearbeschleuniger UNILAC kommenden Ionen auf bis zu 90 Prozent der Lichtgeschwindigkeit (270 000 km/s) beschleunigt werden.

2.4 Strahlprofil und Strahldimension

Zunächst wenden wir uns der Definition bzw. Beschreibung eines Teilchenstrahls zu. Der Teilchenstrahl kann sich als die Gesamtheit aller Teilchen repräsentieren lassen. Mit anderen Worten kann man sich einen Teilchenstrahl wie in der geometrischen Lichtoptik als Überlagerung vieler Einzelstrahlen vorstellen. Der Teilchenstrahl ist vollständig festgelegt, wenn die Intensitätsverteilung der Einzelstrahlen, d.h. die Dichteverteilung als Funktion von s bekannt ist [16], wobei s die Wegstrecke längs der Sollbahn ist. In Teilchenbeschleunigern können Strahlen unter anderem in Elektronenstrahlen, Ionenstrahlen und Protonenstrahlen unterteilt werden. Es gibt in der Beschleunigerphysik zwei Arten von Teilchenstrahlen.

- **Ungebündelter Teilchenstrahl**, welcher kein longitudinales Teilsystem besitzt. In einem ungebündelten Teilchenstrahl variiert die Dichte der Teilchen langsam entlang der Strahlausbreitung und die Strömung der Teilchen ist ungefähr glatt.
- **Gebündelter Teilchenstrahl**, in dem die Teilchen in mehrere Impulse (Bündel) von Teilchen unterteilt sind. Der gebündelte Strahl wird am häufigsten

in modernen Einrichtungen verwendet, da die meisten modernen Beschleunigerkonzepte gebündelte Strahlen für die Beschleunigung erfordern. In einem gebündelten Teilchenstrahl kann die Dichte der Teilchen im Gegensatz zu einem ungebündelten Teilchenstrahl sehr schnell variieren, d.h. einige Teile des Strahls haben eine hohe Dichte, während andere Teile sehr geringe Dichten haben.

Nur gebündelte Teilchenstrahlen werden in dieser Arbeit für die Simulation verwendet und in den folgenden Kapiteln einfach Strahl genannt.

Das Profil eines Teilchenstrahls liefert Informationen wie zur Form, Breite und Position des Strahls. Diese Informationen können durch die Messung der Dichteverteilung der Teilchen auf jedem 3D-projizierten Koordinatensystem gewonnen werden.

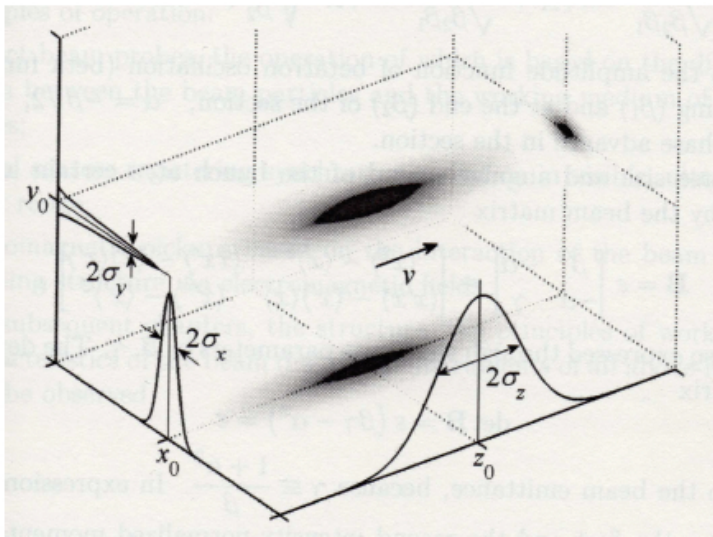


Abbildung 2.8.: Darstellung eines gebündelten Strahls in der 3D-Ebene [27].

In Abb. 2.8 wird jede Projektion des Strahlprofils für die beiden transversalen (x, y) Achsen und die longitudinale Koordinate bezüglich der Bewegungsrichtung z des Strahls definiert. v in der oben liegenden Abbildung bezeichnet die Strahlgeschwindigkeit. (σ_x, σ_y) steht für die Halbbreite eines Gaußförmig verteilten

Strahls in der transversalen Ebene (x, y) und σ_z für die longitudinale Halbbreite bzw. die Länge eines ebenfalls Gaußförmig verteilten Strahls. Die Standardabweichung σ_x bzw. σ_y wird auch häufig RMS-Breite (Root Mean Square) genannt. Die auf Eins normierte eindimensionale Gaußverteilung entlang der x -Richtung lautet [16]:

$$\varrho(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{x^2}{\sigma_x^2}\right). \quad (2.13)$$

Wenn man Gleichung (2.13) anschaut, ist deutlich zu erkennen, dass σ_x der Abstand von der Strahlachse ist, bei dem die Ladungsdichte auf den Wert $\exp(-1/2) = 0.607$ abgefallen ist. Dies gilt auch für σ_y und σ_z . Das Profil eines Strahls gemäß Gl. (2.13) ist in untenstehender Abbildung dargestellt. Die Standardabweichung σ_x in x -Richtung beträgt dabei 0.8 mm.

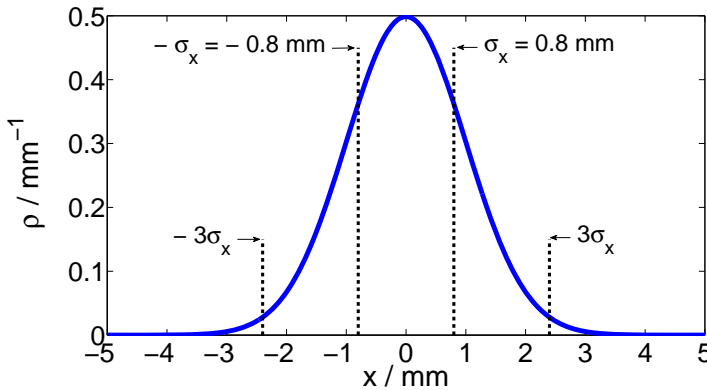


Abbildung 2.9.: Strahlprofil, das einer Gaußverteilung entspricht.

Die tatsächliche Dichteverteilung kann in der Regel mit Gl. (2.13) in einem Bereich von drei Standardabweichungen, nämlich $-3\sigma_x \leq x \leq 3\sigma_x$, in guter Näherung approximiert werden [16]. Angesichts der Tatsache, dass der Teilchenstrahl nach außen durch das Strahlrohr scharf begrenzt ist, ist die Gaußverteilung in jedem Fall nur eine Approximation, da sie sich im Bereich von $-\infty$ bis $+\infty$ erstreckt.

2.5 Transversale Bahndynamik in Kreisbeschleunigern

2.5.1 Gleichgewichtsbahn und Koordinatensystem

Das Strahlführungssystem lässt sich mathematisch einfacher beschreiben, indem man ein Koordinatensystem definiert, bei dem die Teilchenbahnen relativ zur Bahn des zentralen Teilchens beschrieben werden. Aufgrund der geometrischen Anordnung der Strahlführungsmagnete wird die zentrale Bahn \vec{r}_0 , die auch Sollbahn genannt wird, als bekannt vorausgesetzt. Die Beschreibung der momentanen Position eines einzelnen Teilchens im Strahl erfolgt mithilfe eines ebenen (x, y) -Koordinatensystems, das sich entsprechend der Teilchengeschwindigkeit entlang der zentralen Bahn bewegt. Die momentane Position des mitbewegten Koordinatensystems wird durch den längs der zentralen Bahn zurückgelegten Weg s festgelegt, während die momentane Position eines Teilchens durch die Angabe von s und der Koordinaten (x, y) festgelegt wird. Das Standardkoordinatensystem eines Kreisbeschleunigers wird in folgender Abbildung veranschaulicht.

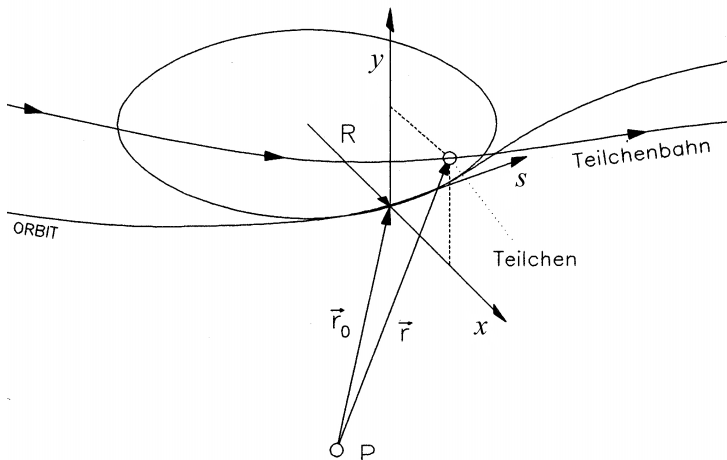


Abbildung 2.10.: Standardkoordinatensystem [28].

Das (x, y, s) -Koordinatensystem wird auch krummliniges Koordinatensystem genannt. Die Gleichgewichtsbahn ("equilibrium orbit") eines Kreisbeschleunigers ist

die in sich geschlossene Bahnkurve ("closed orbit"), die das Sollteilchen bei jedem Umlauf von Neuem durchläuft [16]. Teilchen, deren Position und/oder Richtung von der Gleichgewichtsbahn abweichen, erzeugen Betatronschwingungen um die Gleichgewichtsbahn. Diese Betatronschwingungen sind die Lösungen der sogenannten "Hill'schen Differentialgleichung", die im folgenden Abschnitt behandelt wird.

2.5.2 Hill'sche Differentialgleichung

Die Hill'sche Differentialgleichung, die aus den Bewegungsgleichungen [16] in linearer Näherung abgeleitet wird, ist gegeben durch

$$y'' + K(s)y = 0, \quad K(s + C) = K(s), \quad (2.14)$$

wobei y'' die zweite Ableitung von y nach s kennzeichnet. Eine analoge Differentialgleichung erhält man für die x -Ebene. Die Gleichung (2.14) sieht sehr ähnlich wie die Gleichung des harmonischen Oszillators aus. Die beiden Gleichungen unterscheiden sich in dem Koeffizienten $K(s)$, der hier in diesem Fall nicht konstant ist, sondern eine periodische Funktion von s ist. In einem Kreisbeschleuniger wird die Teilchenbahn durch eine reelle Lösung der Hill'schen Differentialgleichung beschrieben, welche durch die folgende Gleichung gegeben wird [16]

$$y(s) = \sqrt{\epsilon_i} \cdot \sqrt{\beta(s)} \cdot \cos[\psi(s) + \psi_0]. \quad (2.15)$$

Die obige Gleichung beschreibt die Betatronschwingung mit der ortsabhängigen Amplitude $\sqrt{\epsilon_i} \cdot \sqrt{\beta(s)}$ und der Startphase ψ_0 . $\beta(s)$ kennzeichnet die Betatronfunktion, auch Betafunktion genannt, $\psi(s)$ die Phase des Gesamtstrahls, auch Betatronphase genannt und ϵ_i die Emittanz eines einzelnen Teilchens, die im nächsten Abschnitt 2.5.3 ausführlich erörtert wird. Die Betafunktion ist in der Beschleunigertechnik von besonderer Bedeutung, denn sie ist die zentrale Funktion zur Beschreibung der linearen Bahndynamik eines Kreisbeschleunigers. Einige der wichtigsten Aspekte und Gleichungen zur Betafunktion sind unten zusammengestellt.

- $\beta(s)$ is periodisch:

$$\beta(s + C) = \beta(s)$$

- Bahn eines einzelnen Teilchens:

$$y(s) = \sqrt{\epsilon_i} \cdot \sqrt{\beta(s)} \cdot \cos[\psi(s) + \psi_0]$$

- Die lokale Wellenlänge $\lambda(s)$ der Betatronschwingung ist gegeben durch

$$\lambda(s) = 2\pi\beta(s)$$

- Die Betatronschwingungszahl Q , auch *Betatron Tune* genannt, d.h. die Zahl der Betatronschwingungen pro Umlauf, lässt sich wie folgt definieren:

$$Q = \frac{1}{2\pi} \oint \frac{ds}{\beta(s)}$$

- Der Betatronphasenvorschub pro Umlauf μ ist gegeben als

$$\mu = \frac{Q}{2\pi} = \oint \frac{ds}{\beta(s)}.$$

2.5.3 Transversale Strahlemittanz

Zunächst wenden wir uns der Definition bzw. Beschreibung einer Phasenellipse zu. Die durch Projektion auf die transversale Ebene (x, x') bzw. (y, y') erhaltenen Dichteverteilungen $\varrho(x, x')$ bzw. $\varrho(y, y')$ können in der Regel durch Ellipsen umrandet werden, wie man in untenstehender Abbildung sehen kann.

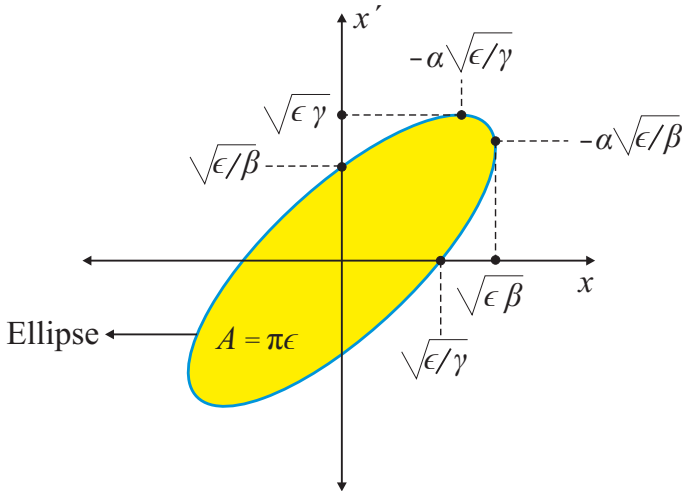


Abbildung 2.11.: Phasenellipse der Teilchenbewegung. Das Bild wurde in Anlehnung an [24] erstellt.

Diese Ellipsen werden Phasenellipsen genannt und durch eine zweidimensionale symmetrische Matrix σ , die sogenannte Strahlmatrix, beschrieben [52].

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{pmatrix}. \quad (2.16)$$

Die Twiss-Parameter α , β und γ in Abb. 2.11 können auch durch die Elemente der σ -Matrix dargestellt werden [29]:

$$\alpha = -\sigma_{12}/\epsilon, \quad \beta = \sigma_{11}/\epsilon, \quad \gamma = \sigma_{22}/\epsilon. \quad (2.17)$$

Das Einsetzen der Gl. (2.17) in die Gleichung (2.16) ergibt

$$\sigma = \epsilon \begin{pmatrix} \beta & -\alpha \\ -\alpha & \gamma \end{pmatrix}. \quad (2.18)$$

Die von der Ellipse umschlossene Fläche $A = \pi\epsilon$ in Abb. 2.11, welche von den Teilchen besetzt und durch die gelbe Farbe gekennzeichnet ist, ist die mathematische Beschreibung der Emittanz, gemessen zum Beispiel in $\text{mm} \cdot \text{mrad}$. Sie ist ein Maß für die transversale Strahlbündelung und beschreibt somit die Qualität eines Strahls. Ein Strahl mit einer niedrigen Emittanz ist ein Strahl, in dem die einzelnen Teilchen einen kleinen Abstand zueinander und ungefähr den gleichen Impuls haben. Anders ausgedrückt führt eine kleine Strahlemittanz zu einem stark fokussierten Teilchenstrahl. Im Gegensatz zu den physikalischen Abmessungen eines Strahls, die in einem Beschleuniger ortsvariant sind, ist die Emittanz in Abwesenheit von dissipativen oder Kühl-Kräften invariant und wird somit für die Beschreibung des Strahls verwendet [32].

Zur Darstellung bzw. Herleitung der Emittanz als Funktion der Matricelemente σ_{11} , σ_{12} und σ_{22} , berechnen wir zunächst die Determinante $\text{Det}(\sigma)$ der Strahlmatrix, gegeben in den Gleichungen (2.16) und (2.18):

$$\text{Det}(\sigma) = \sigma_{11} \cdot \sigma_{22} - \sigma_{12}^2 = \epsilon^2(\gamma \cdot \beta - \alpha^2). \quad (2.19)$$

Aus Gl. (2.19) lässt sich dann ϵ wie folgt bestimmen:

$$\epsilon = \sqrt{\frac{\sigma_{11} \cdot \sigma_{22} - \sigma_{12}^2}{\gamma \cdot \beta - \alpha^2}}. \quad (2.20)$$

Mithilfe des Zusammenhanges zwischen den Twiss-Parametern α , γ und β [30, 31]

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{1 + \alpha^2}{\beta} \\ \Rightarrow \gamma \cdot \beta - \alpha^2 &= 1, \end{aligned} \quad (2.21)$$

ergibt sich die Strahlemittanz A als Funktion der Matricelemente

$$A = \pi\epsilon = \pi\sqrt{\sigma_{11} \cdot \sigma_{22} - \sigma_{12}^2}. \quad (2.22)$$

Dennoch wird die Emittanz in der Praxis aus messbaren Größen wie dem Strahlprofil (σ_x, σ_y) bzw. dem quadrupolaren Moment $(\sigma_x^2 - \sigma_y^2)$ des Strahls bestimmt. Aus diesem Grund soll auch ein Zusammenhang zwischen der Emittanz und den Strahlbreiten σ_x und σ_y hergestellt werden. Zunächst schreiben wir nochmals Gl. (2.15) in der x -Ebene.

$$x(s) = \sqrt{\epsilon_x} \cdot \sqrt{\beta(s)} \cdot \cos[\psi(s) + \psi_0]. \quad (2.23)$$

Aus der obigen Gleichung sieht man, dass der maximale Wert bzw. die Amplitude von $x(s)$ gleich $\sqrt{\epsilon_x} \cdot \sqrt{\beta(s)}$ ist, welche je nach Definition der Emittanz einer (σ_x) , zwei $(2\sigma_x)$ oder drei $(3\sigma_x)$ Standardabweichungen des entsprechenden Strahlprofils in x -Richtung entspricht. Bei Elektronenmaschinen handelt es sich meistens um eine Standardabweichung-Emittanz, während bei Protonenmaschinen die Emittanz von zwei Standardabweichungen verwendet wird [16]. Angenommen, dass wir eine Standardabweichung σ_x zugrunde legen, ergibt sich dann

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sqrt{\epsilon_x \cdot \beta(s)} \\ \Rightarrow \epsilon_x &= \frac{\sigma_x^2}{\beta(s)}, \quad \epsilon_y = \frac{\sigma_y^2}{\beta(s)} \\ \Rightarrow A_x &= \pi\epsilon_x = \frac{\pi\sigma_x^2}{\beta(s)}, \quad A_y = \pi\epsilon_y = \frac{\pi\sigma_y^2}{\beta(s)}. \end{aligned} \quad (2.24)$$

A_x bzw. A_y ist die Emittanz in der x - bzw. y -Ebene. Diese Emittanz auf Basis der Standardabweichung σ_x und σ_y heißt RMS-Emittanz (RMS = Root Mean Square).

Es gibt in der Beschleunigerphysik viele Methoden zur Messung der transversalen Emittanz, unter anderem die Methode von Miller [1], die zum ersten Mal in 1983 am SLAC National Accelerator Laboratory in Kalifornien in den USA entwickelt und erfolgreich getestet wurde. Diese Methode beruht darauf, mit vier symmetrischen äquidistanten Stripline-Elektroden das quadrupolare Moment eines Elektronenstrahls, $\sigma_x^2 - \sigma_y^2$, zu messen und mithilfe der Transfermatrix von einer Referenzstelle im LINAC zu den Pick-up-Stellen die Emittanz zu bestimmen. Wie bereits im Abschnitt 1.2 erwähnt, benötigt man im Allgemeinen in einem Linearbeschleuniger sechs quadrupolare Pick-ups, platziert an verschiedenen Stellen

im LINAC, um die transversalen Komponenten der Strahlemittanz zu bestimmen. In Kreisbeschleunigern hingegen, sind für die Messung der Emittanz gemäß Gl. (1.4) nur zwei Pick-ups erforderlich, da aus den Amplituden der Strahlpositionsschwingungen in Ringbeschleunigern die Betatronfunktionen β_x und β_y auf der rechten Seite der Gleichung (1.4) direkt bestimmt werden können [6].

Weitere Details zur Messung der Strahlemittanz in Ringbeschleunigern können in [6] nachgelesen werden.

3 Multipol-Analyse von elektromagnetischen Feldern erzeugt von einem Teilchenstrahl

In diesem Kapitel werden die einen Teilchenstrahl begleitenden elektromagnetischen Felder sowie deren Multipolentwicklung behandelt. Darüber hinaus werden aus der Multipolentwicklung der elektromagnetischen Felder die Multipolmomente des Strahls hergeleitet.

3.1 Elektrisches Feld

Angenommen, die Wellenlänge von Interesse λ oder der Strahl sei lang gegenüber den Messelektroden, dann lässt sich in diesem Fall das Problem auf ein zweidimensionales elektrostatisches Problem reduzieren.

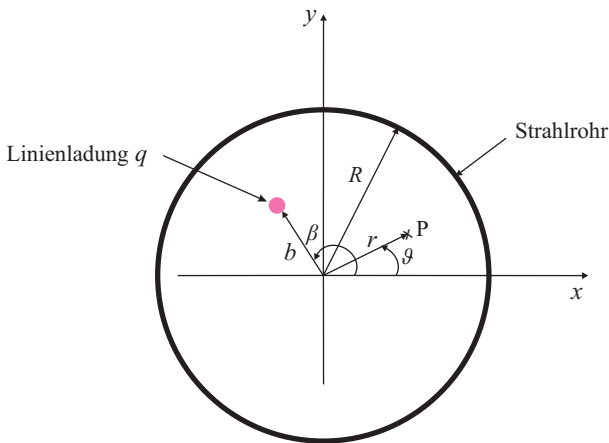


Abbildung 3.1.: Linienladung im Inneren eines Strahlrohrs.

Ausgehend von einer elektrisch unendlich langen Linienladungsverteilung der Dichte q an einer beliebigen Stelle (b, β) im Inneren eines leitenden kreisförmigen Strahlrohres (siehe Abb. 3.1) kann sich das elektrostatische Potential $V(r, \vartheta)$ in einem Aufpunkt P innerhalb des Strahlrohres mithilfe der Spiegelungsmethode bestimmen lassen [46, 36]:

$$V(r, \vartheta) = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \left[\ln \frac{1}{\sqrt{r^2 + b^2 - 2rb \cos(\vartheta - \beta)}} - \ln \frac{1}{\sqrt{r^2 + \left(\frac{R^2}{b}\right)^2 - \frac{2rR^2}{b} \cos(\vartheta - \beta)}} + \ln \frac{b}{R} \right]. \quad (3.1)$$

Der erste Term auf der rechten Seite der obigen Gleichung bezeichnet das Potential der ursprünglichen Linienladung der Dichte q , während der zweite Term das Potential der Spiegelungsladung ist. Der Term $\ln(b/R)$ ist eine Konstante zum Erden des leitenden Strahlrohres. Unter Verwendung der Additions- und Subtraktionstheoreme der trigonometrischen Funktionen und angenommen, dass $b \ll r, R$, kann Gl. (3.1) wie folgt annähernd zur Taylorreihe erweitert werden [63, 46].

$$V(r, \vartheta) = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \left[\ln \frac{R}{r} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b^k}{k} \left(\frac{1}{r^k} - \frac{r^k}{R^{2k}} \right) \cos \{k(\vartheta - \beta)\} \right]. \quad (3.2)$$

Durch den Gradienten des in Gl. (3.2) bestimmten Potentials können die radiale und azimutale Komponenten des elektrischen Feldes im Kreiszylinderkoordinatensystem (r, ϑ, z) wie folgt berechnet werden:

$$E_r(r, \vartheta) = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 r} \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} b^k \left(\frac{1}{r^k} + \frac{r^k}{R^{2k}} \right) \cos \{k(\vartheta - \beta)\} \right], \quad (3.3)$$

$$E_{\vartheta}(r, \vartheta) = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \vartheta} = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 r} \sum_{k=1}^{\infty} b^k \left(\frac{1}{r^k} - \frac{r^k}{R^{2k}} \right) \sin \{k(\vartheta - \beta)\}. \quad (3.4)$$

In Gl. (3.4) kann man erkennen, dass auf der Oberfläche des Strahlrohres (an der Stelle $r = R$) die tangentielle Komponente des elektrischen Feldes E_{ϑ} wie erwartet Null ist. Nun betrachten wir die radiale Komponente von \vec{E} auf der inneren Oberfläche des metallischen Strahlrohres; d.h. an der Stelle $r = R$:

$$E_r(r=R, \vartheta) = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 R} \left[1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{b}{R} \right)^k \cos \{k(\vartheta - \beta)\} \right]. \quad (3.5)$$

Mithilfe der trigonometrischen Standardformeln, unter anderem $\cos(\beta) = x/b$ und $\sin(\beta) = y/b$, lässt sich Gl. (3.5) wie folgt umformen [36]:

$$\begin{aligned} E_r(R, \vartheta) \approx \frac{q}{2\pi\epsilon_0 R} & \left[1 + 2 \left\{ \frac{x}{R} \cos(\vartheta) + \frac{y}{R} \sin(\vartheta) + \left(\frac{x^2}{R^2} - \frac{y^2}{R^2} \right) \cos(2\vartheta) \right. \right. \\ & + \frac{2xy}{R^2} \sin(2\vartheta) + \left(\frac{x^3}{R^3} - \frac{3xy^2}{R^3} \right) \cos(3\vartheta) \\ & \left. \left. - \left(\frac{y^3}{R^3} - \frac{3x^2y}{R^3} \right) \sin(3\vartheta) \right\} \right]. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Nun kann, für den Fall eines realistischen Teilchenstrahls, die Linienladungsdichte q mit einer geeigneten Gewichtungsfunktion multipliziert werden [45]. Für Gaußsche Strahlverteilungen mit den Halbbreiten (σ_x, σ_y) in beiden transversalen Richtungen zum Beispiel und unter der Annahme, dass $\sigma_x, \sigma_y \ll R$, ergibt sich folgender Ausdruck für die radiale Komponente des elektrischen Feldes [36, 44]:

$$\begin{aligned} E_r(R, \vartheta) \approx E_q & \left[1 + 2 \left\{ \frac{\bar{x}}{R} \cos(\vartheta) + \frac{\bar{y}}{R} \sin(\vartheta) + \left(\frac{\sigma_x^2 - \sigma_y^2}{R^2} + \frac{\bar{x}^2 - \bar{y}^2}{R^2} \right) \cos(2\vartheta) \right. \right. \\ & + \frac{2\bar{x}\bar{y}}{R^2} \sin(2\vartheta) + \left[3 \left(\frac{\sigma_x^2 - \sigma_y^2}{R^2} \right) + \left(\frac{\bar{x}^2 - 3\bar{y}^2}{R^2} \right) \right] \frac{\bar{x}}{R} \cos(3\vartheta) \\ & \left. + \left[3 \left(\frac{\sigma_x^2 - \sigma_y^2}{R^2} \right) + \left(\frac{3\bar{x}^2 - \bar{y}^2}{R^2} \right) \right] \frac{\bar{y}}{R} \sin(3\vartheta) \right\} + \dots \right], \end{aligned} \quad (3.7)$$

wobei $E_q = i_b/(2\pi\epsilon_0 R)$ und (\bar{x}, \bar{y}) für die Strahlposition in der transversalen Ebene (x, y) steht. i_b bezeichnet den Strahlstrom.

Weitere Details zu den von einem Teilchenstrahl erzeugten elektromagnetischen Feldern können auch in [60, 62] nachgelesen werden.

3.2 Magnetisches Feld

Das durch einen Teilchenstrahl erzeugte magnetische Feld lässt sich analog zum elektrischen Feld berechnen. Unter den gleichen Voraussetzungen wie im Abschnitt 3.1, nämlich dass hier ein zweidimensionales statisches Problem vorliegt, kann der Strahlstrom als eine bewegte Ladung mit konstanter Geschwindigkeit angesehen werden. Die gesamte magnetische Induktion \vec{B}_{ges} in einem in der transversalen Ebene (r, ϑ) liegenden Aufpunkt P (siehe Abb. 3.1) im Inneren eines elektrisch leitenden Strahlrohres mit Radius R ergibt sich dann wie folgt [6]:

$$\begin{aligned}
 \vec{B}_{ges}(r, \vartheta) = & -i_b \frac{\mu_0}{2\pi} \left[\frac{1}{r} \vec{e}_\vartheta + \left(1 + \frac{r^2}{R^2} \right) \left\{ \frac{\bar{x}}{r^2} \cos(\vartheta) + \frac{\bar{y}}{r^2} \sin(\vartheta) \right\} \vec{e}_\vartheta \right. \\
 & - \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right) \left\{ \frac{\bar{x}}{r^2} \sin(\vartheta) - \frac{\bar{y}}{r^2} \cos(\vartheta) \right\} \vec{e}_r \\
 & + \left(1 + \frac{r^4}{R^4} \right) \left\{ \left(\frac{\sigma_x^2 - \sigma_y^2}{r^3} + \frac{\bar{x}^2 - \bar{y}^2}{r^3} \right) \cos(2\vartheta) + \frac{\bar{x} \bar{y}}{r^3} \sin(2\vartheta) \right\} \vec{e}_\vartheta \\
 & - \left(1 - \frac{r^4}{R^4} \right) \left\{ \left(\frac{\sigma_x^2 - \sigma_y^2}{r^3} + \frac{\bar{x}^2 - \bar{y}^2}{r^3} \right) \sin(2\vartheta) \right. \\
 & \left. \left. + \frac{\bar{x} \bar{y}}{r^3} \cos(2\vartheta) \right\} \vec{e}_r + \dots \right], \tag{3.8}
 \end{aligned}$$

wobei, i_b für den Strahlstrom steht. In Gl. (3.8) ist deutlich zu erkennen, dass das gesamte Magnetfeld aus einer radialen und einer azimuthalen Komponente besteht. Darüber hinaus kann man sehen, dass die radiale Komponente der gesamten magnetischen Induktion auf der Oberfläche (an der Stelle $r = R$) des Strahlrohres wie erwartet verschwindet, und Gl. (3.8) vereinfacht sich wie folgt:

$$\begin{aligned}
\vec{B}_{ges}(r=R, \vartheta) = & -i_b \frac{\mu_0}{2\pi R} \vec{e}_\vartheta \left[1 + 2 \left\{ \frac{\bar{x}}{R} \cos(\vartheta) + \frac{\bar{y}}{R} \sin(\vartheta) \right. \right. \\
& \left. \left. + \left(\frac{\sigma_x^2 - \sigma_y^2}{R^2} + \frac{\bar{x}^2 - \bar{y}^2}{R^2} \right) \cos(2\vartheta) + \frac{\bar{x} \bar{y}}{R^2} \sin(2\vartheta) \right\} + \dots \right].
\end{aligned}
\tag{3.9}$$

4 Verschiedene Arten von quadrupolaren Pick-ups

Quadrupolare Pick-ups sind in der Beschleunigerphysik von besonderer Bedeutung, da sie die Messung bestimmter Parameter, wie die transversale Ausdehnung des Strahls bzw. die Strahlelliptizität ($\sigma_x^2 - \sigma_y^2$), ermöglichen. In diesem Kapitel werden drei Arten von quadrupolaren Pick-ups behandelt, wobei mehr Akzent auf elektrostatische Pick-ups gelegt wird. In den Abschnitten 4.2 und 4.3 wird nur die Funktionsweise der beiden anderen Sensorarten erläutert.

4.1 Elektrostatische Pick-ups

4.1.1 Funktionsweise

Typische elektrostatische Pick-ups sind in Abb. 4.1 und 4.2 dargestellt.

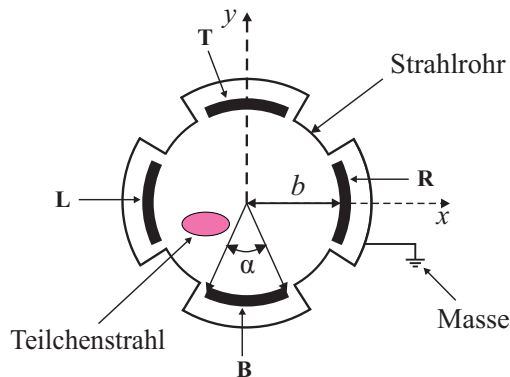


Abbildung 4.1.: Vorderansicht eines typischen elektrostatischen Pick-up mit den sogenannten Button-Elektroden; Pick-up-Modell für die analytische Berechnung des quadrupolaren Signals.

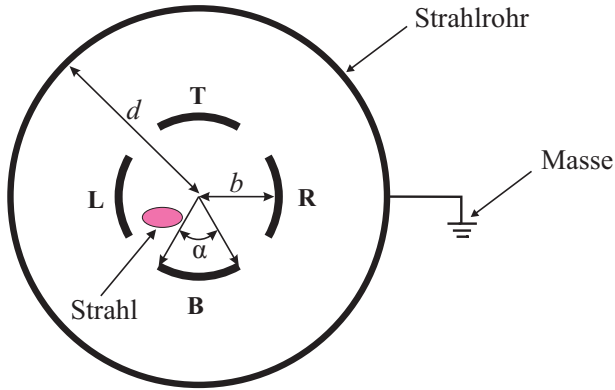


Abbildung 4.2.: Vorderansicht eines weiteren elektrostatischen Pick-up-Design.

Elektrostatische Pick-ups, auch kapazitive Pick-ups genannt, bestehen im Allgemeinen aus vier symmetrischen metallischen Elektroden, platziert in derselben transversalen Ebene. Die Funktionsweise solcher Pick-ups ist die Messung des elektrischen Feldes erzeugt vom im Inneren des Strahlrohres beschleunigten Teilchenstrahl. **R**, **L**, **T** und **B** in den Abbildungen 4.1 und 4.2 stehen für die rechte, linke, obere und untere Elektroden. Eine bildliche Beschreibung der Funktionsweise solcher Pick-ups ist in unten stehender Abbildung dargestellt.

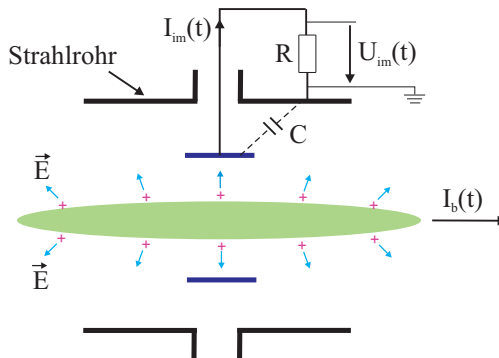


Abbildung 4.3.: Bildliche Beschreibung der Funktionsweise kapazitiver Pick-ups. Das Bild wurde in Anlehnung an [29] erstellt.

In Abb. 4.3 steht $I_b(t)$ für den Strahlstrom eines positiv geladenen Teilchenstrahls, welcher mit der Farbe grün gekennzeichnet ist.

Solche Pick-ups sind in der Beschleunigerphysik als Strahlpositionsmonitor (Beam Position Monitor) bekannt, denn sie waren in erster Linie zur Messung der Strahlposition sowohl in vertikaler als auch in horizontaler Richtung gedacht. Sie können aber durch bestimmte Signalkombinationen, die im Kapitel 5 ausführlich beschrieben werden, als quadrupolare Pick-ups betrieben werden.

Weitere Details zur Funktionsweise kapazitiver Pick-ups sind in mehreren Büchern und Veröffentlichungen zu finden, unter anderem in [51], [57] und [50].

4.1.2 Herleitung der Signale am Ausgang der Elektroden

Die Signale am Ausgang aller Elektroden werden wie im vorherigen Kapitel unter der Annahme betrachtet, dass der Teilchenstrahl lang gegenüber den Abmessungen der Elektrode ist und außerdem $\sigma_x, \sigma_y \ll b$, wobei b der Pick-up-Radius ist (siehe Abb. 4.1). In diesem Fall kann das Problem elektrostatisch gelöst werden. Die an jeder Elektrode des Pick-up-Modells in Abb. 4.1 induzierte Spannung U kann dann durch die Flächenintegration der in Gl. (3.7) angegebenen radialen Komponente des elektrischen Feldes auf jeder Platte, geteilt durch die Kapazität zwischen der Platte und dem Strahlrohr, berechnet werden. Hierbei wird R in Gl. (3.7) durch den Pick-up-Radius b des in Abb. 4.1 dargestellten Pick-up-Modells ersetzt. Da es sich bei dem zu berechnenden quadrupolaren Signal um ein auf die Summe aller Elektrodensignale normiertes Signal handelt und aufgrund der Symmetrie der Anordnung, werden bei der Herleitung der Ausgangsspannungen die Kapazität zwischen der Platte und dem Strahlrohr sowie die Integration über die Elektrodenlänge weggelassen.

• Elektrode R:

$$\begin{aligned}
 U_R &\propto b \int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} (\epsilon_0 E_r) d\vartheta \\
 &= \frac{i_b}{2\pi} \int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} \left[1 + 2 \left\{ \frac{\bar{x}}{b} \cos(\vartheta) + \frac{\bar{y}}{b} \sin(\vartheta) \right. \right. \\
 &\quad + \left(\frac{\sigma_x^2 - \sigma_y^2}{b^2} + \frac{\bar{x}^2 - \bar{y}^2}{b^2} \right) \cos(2\vartheta) + \frac{2\bar{x}\bar{y}}{b^2} \sin(2\vartheta) \\
 &\quad \left. \left. + \left\{ 3 \left(\frac{\sigma_x^2 - \sigma_y^2}{b^2} \right) + \frac{\bar{x}^2 - 3\bar{y}^2}{b^2} \right\} \frac{\bar{x}}{b} \cos(3\vartheta) + \dots \right\} + \dots \right] d\vartheta \\
 &= \frac{i_b}{2\pi} \left[\alpha + 4 \sin(\alpha/2) \frac{\bar{x}}{b} + 2 \sin(\alpha) \left(\frac{\sigma_x^2 - \sigma_y^2}{b^2} + \frac{\bar{x}^2 - \bar{y}^2}{b^2} \right) \right. \\
 &\quad \left. + 4 \frac{\sin(3\alpha/2)}{3} \left\{ 3 \left(\frac{\sigma_x^2 - \sigma_y^2}{b^2} \right) + \frac{\bar{x}^2 - 3\bar{y}^2}{b^2} \right\} \frac{\bar{x}}{b} + \dots \right] \\
 &\boxed{U_R \propto \frac{i_b}{2\pi} \alpha \left[1 + z_{1x} + z_2 + z_{3x} + \dots \right]}, \tag{4.1}
 \end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned}
 z_{1x} &= 2 \frac{\sin(\alpha/2)}{\alpha/2} \frac{\bar{x}}{b}, \\
 z_2 &= 2 \frac{\sin(\alpha)}{\alpha} \left(\frac{\sigma_x^2 - \sigma_y^2}{b^2} + \frac{\bar{x}^2 - \bar{y}^2}{b^2} \right), \\
 z_{3x} &= 2 \frac{\sin(3\alpha/2)}{3\alpha/2} \left\{ 3 \left(\frac{\sigma_x^2 - \sigma_y^2}{b^2} \right) + \frac{\bar{x}^2 - 3\bar{y}^2}{b^2} \right\} \frac{\bar{x}}{b}.
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

- Elektrode T:

$$\begin{aligned}
U_T &\propto b \int_{\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\pi}{2}+\frac{\alpha}{2}} (\varepsilon_0 E_r) d\vartheta \\
&= \frac{i_b}{2\pi} \int_{\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\pi}{2}+\frac{\alpha}{2}} \left[1 + 2 \left\{ \frac{\bar{x}}{b} \cos(\vartheta) + \frac{\bar{y}}{b} \sin(\vartheta) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \left(\frac{\sigma_x^2 - \sigma_y^2}{b^2} + \frac{\bar{x}^2 - \bar{y}^2}{b^2} \right) \cos(2\vartheta) + \frac{2 \bar{x} \bar{y}}{b^2} \sin(2\vartheta) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \left\{ 3 \left(\frac{\sigma_x^2 - \sigma_y^2}{b^2} \right) + \frac{3\bar{x}^2 - \bar{y}^2}{b^2} \right\} \frac{\bar{y}}{b} \sin(3\vartheta) + \dots \right\} + \dots \right] d\vartheta \\
&= \frac{i_b}{2\pi} \left[\alpha + 4 \sin(\alpha/2) \frac{\bar{y}}{b} - 2 \sin(\alpha) \left(\frac{\sigma_x^2 - \sigma_y^2}{b^2} + \frac{\bar{x}^2 - \bar{y}^2}{b^2} \right) \right. \\
&\quad \left. - 4 \frac{\sin(3\alpha/2)}{3} \left\{ 3 \left(\frac{\sigma_x^2 - \sigma_y^2}{b^2} \right) + \frac{3\bar{x}^2 - \bar{y}^2}{b^2} \right\} \frac{\bar{y}}{b} + \dots \right] \\
&\boxed{U_T \propto \frac{i_b}{2\pi} \alpha \left[1 + z_{1y} - z_2 - z_{3y} + \dots \right]}, \tag{4.3}
\end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}
z_{1y} &= 2 \frac{\sin(\alpha/2)}{\alpha/2} \frac{\bar{y}}{b}, \\
z_{3y} &= 2 \frac{\sin(3\alpha/2)}{3\alpha/2} \left\{ 3 \left(\frac{\sigma_x^2 - \sigma_y^2}{b^2} \right) + \frac{3\bar{x}^2 - \bar{y}^2}{b^2} \right\} \frac{\bar{y}}{b}. \tag{4.4}
\end{aligned}$$

- Elektrode L:

$$\begin{aligned}
U_L &\propto b \int_{\pi-\frac{\alpha}{2}}^{\pi+\frac{\alpha}{2}} (\epsilon_0 E_r) d\vartheta \\
&= \frac{i_b}{2\pi} \int_{\pi-\frac{\alpha}{2}}^{\pi+\frac{\alpha}{2}} \left[1 + 2 \left\{ \frac{\bar{x}}{b} \cos(\vartheta) + \frac{\bar{y}}{b} \sin(\vartheta) \right. \right. \\
&\quad + \left(\frac{\sigma_x^2 - \sigma_y^2}{b^2} + \frac{\bar{x}^2 - \bar{y}^2}{b^2} \right) \cos(2\vartheta) + \frac{2\bar{x}\bar{y}}{b^2} \sin(2\vartheta) \\
&\quad \left. \left. + \left\{ 3 \left(\frac{\sigma_x^2 - \sigma_y^2}{b^2} \right) + \frac{\bar{x}^2 - 3\bar{y}^2}{b^2} \right\} \frac{\bar{x}}{b} \cos(3\vartheta) + \dots \right\} + \dots \right] d\vartheta \\
&= \frac{i_b}{2\pi} \left[\alpha - 4 \sin(\alpha/2) \frac{\bar{x}}{b} + 2 \sin(\alpha) \left(\frac{\sigma_x^2 - \sigma_y^2}{b^2} + \frac{\bar{x}^2 - \bar{y}^2}{b^2} \right) \right. \\
&\quad \left. - 4 \frac{\sin(3\alpha/2)}{3} \left\{ 3 \left(\frac{\sigma_x^2 - \sigma_y^2}{b^2} \right) + \frac{\bar{x}^2 - 3\bar{y}^2}{b^2} \right\} \frac{\bar{x}}{b} + \dots \right] \\
&\boxed{U_L \propto \frac{i_b}{2\pi} \alpha \left[1 - z_{1x} + z_2 - z_{3x} + \dots \right]}. \tag{4.5}
\end{aligned}$$

- Elektrode B:

$$\begin{aligned}
 U_B &\propto b \int_{\frac{3\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{3\pi}{2}+\frac{\alpha}{2}} (\varepsilon_0 E_r) d\vartheta \\
 &= \frac{i_b}{2\pi} \int_{\frac{3\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{3\pi}{2}+\frac{\alpha}{2}} \left[1 + 2 \left\{ \frac{\bar{x}}{b} \cos(\vartheta) + \frac{\bar{y}}{b} \sin(\vartheta) \right. \right. \\
 &\quad + \left(\frac{\sigma_x^2 - \sigma_y^2}{b^2} + \frac{\bar{x}^2 - \bar{y}^2}{b^2} \right) \cos(2\vartheta) + \frac{2 \bar{x} \bar{y}}{b^2} \sin(2\vartheta) \\
 &\quad \left. \left. + \left\{ 3 \left(\frac{\sigma_x^2 - \sigma_y^2}{b^2} \right) + \frac{3\bar{x}^2 - \bar{y}^2}{b^2} \right\} \frac{\bar{y}}{b} \sin(3\vartheta) + \dots \right\} + \dots \right] d\vartheta \\
 &= \frac{i_b}{2\pi} \left[\alpha - 4 \sin(\alpha/2) \frac{\bar{y}}{b} - 2 \sin(\alpha) \left(\frac{\sigma_x^2 - \sigma_y^2}{b^2} + \frac{\bar{x}^2 - \bar{y}^2}{b^2} \right) \right. \\
 &\quad \left. + 4 \frac{\sin(3\alpha/2)}{3} \left\{ 3 \left(\frac{\sigma_x^2 - \sigma_y^2}{b^2} \right) + \frac{3\bar{x}^2 - \bar{y}^2}{b^2} \right\} \frac{\bar{y}}{b} + \dots \right] \\
 &\boxed{U_B \propto \frac{i_b}{2\pi} \alpha \left[1 - z_{1y} - z_2 + z_{3y} + \dots \right]}. \tag{4.6}
 \end{aligned}$$

4.1.3 Berechnung der Kapazität C_{quad} eines quadrupolaren Pick-up

In diesem Abschnitt werden die an den Elektroden induzierten Ladungen Q_R , Q_T , Q_L und Q_B einer kapazitiven Anordnung wie der in Abb. 4.4 ausführlich berechnet und daraus wird die Kapazität des quadrupolaren Pick-up abgeleitet.

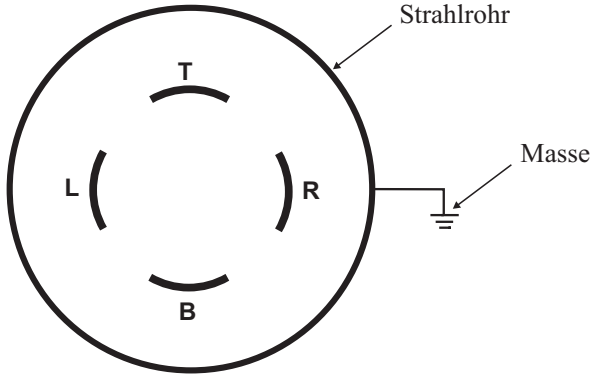


Abbildung 4.4.: Anordnung für die Berechnung der quadrupolaren Kapazität.

Ausgehend von einem Mehrleitersystem [35] wird die Ladung Q_R der Platte R folgendermaßen berechnet:

$$\begin{aligned}
 Q_R &= C_{RT}(V_R - V_T) + C_{RL}(V_R - V_L) + C_{RB}(V_R - V_B) + C_{RM}V_R \\
 &= \underbrace{(C_{RT} + C_{RL} + C_{RB} + C_{RM})}_{= C_R} V_R - C_{RT}V_T - C_{RL}V_L - C_{RB}V_B \\
 &= C_R V_R - C_{RT}V_T - C_{RL}V_L - C_{RB}V_B,
 \end{aligned} \tag{4.7}$$

wobei C_R die Eigenkapazität der rechten Elektrode R bezüglich der Masse ist und C_{mn} die Teilkapazität zwischen den Elektroden m und n . Zum Beispiel steht C_{RM} für die Kapazität zwischen der Elektrode R und der Masse. Analog zur Platte R lassen sich auch die Ladungen anderer Elektroden wie folgt bestimmen:

$$\begin{aligned}
 Q_T &= \underbrace{(C_{TR} + C_{TL} + C_{TB} + C_{TM})}_{= C_T} V_T - C_{TR}V_R - C_{TL}V_L - C_{TB}V_B \\
 &= -C_{TR}V_R + C_T V_T - C_{TL}V_L - C_{TB}V_B,
 \end{aligned} \tag{4.8}$$

$$\begin{aligned}
 Q_L &= \underbrace{(C_{LR} + C_{LT} + C_{LB} + C_{LM})}_{= C_L} V_L - C_{LR}V_R - C_{LT}V_T - C_{LB}V_B \\
 &= -C_{LR}V_R - C_{LT}V_T + C_L V_L - C_{LB}V_B,
 \end{aligned} \tag{4.9}$$

$$\begin{aligned}
Q_B &= \underbrace{(C_{BR} + C_{BT} + C_{BL} + C_{BM})}_{= C_B} V_B - C_{BR} V_R - C_{BT} V_T - C_{BL} V_L \\
&= -C_{BR} V_R - C_{BT} V_T - C_{BL} V_L + C_B V_B .
\end{aligned} \tag{4.10}$$

V_R , V_L , V_T und V_B bezeichnen die Elektrodenpotentiale bezüglich der Abbildung 4.4. Aufgrund der Symmetrie der Anordnung folgt:

$$\begin{aligned}
C_{RL} &= C_{LR} = C_{TB} = C_{BT} := C_{opp} , \\
C_{RT} &= C_{TR} = C_{RB} = C_{BR} = C_{LT} = C_{TL} = C_{LB} = C_{BL} := C_{adj} , \\
C_R &= C_T = C_L = C_B := C_{self} .
\end{aligned} \tag{4.11}$$

Die oben berechneten Ladungen können in Form einer Matrix dargestellt werden:

$$\begin{pmatrix} Q_R \\ Q_T \\ Q_L \\ Q_B \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} C_{self} & -C_{adj} & -C_{opp} & -C_{adj} \\ -C_{adj} & C_{self} & -C_{adj} & -C_{opp} \\ -C_{opp} & -C_{adj} & C_{self} & -C_{adj} \\ -C_{adj} & -C_{opp} & -C_{adj} & C_{self} \end{pmatrix}}_M \cdot \begin{pmatrix} V_R \\ V_T \\ V_L \\ V_B \end{pmatrix} , \tag{4.12}$$

wobei M die Kapazitätsmatrix der Anordnung bezeichnet.

Bildet man die Differenz zwischen der Summe der Ladungen horizontaler Elektroden und der Summe der Ladungen vertikaler Elektroden, ergibt sich das quadrupolare Signal, dessen Berechnung im Kapitel 5 detailliert beschrieben wird.

$$\begin{aligned}
(Q_R + Q_L) - (Q_T + Q_B) &= (C_{self} + 2C_{adj} - C_{opp}) \cdot [(V_R + V_L) - (V_T + V_B)] \\
\Rightarrow (V_R + V_L) - (V_T + V_B) &= \frac{(Q_R + Q_L) - (Q_T + Q_B)}{C_{self} + 2C_{adj} - C_{opp}} .
\end{aligned} \tag{4.13}$$

Aus Gl. (4.13) ergibt sich die Kapazität C_{quad} des quadrupolaren Pick-up als

$$\boxed{C_{quad} = C_{self} + 2C_{adj} - C_{opp}} . \tag{4.14}$$

Analog zur Herleitung von C_{quad} lässt sich durch die Differenz der Ladungen der gegenüberliegenden Elektroden ($Q_R - Q_L$) bzw. ($Q_T - Q_B$) die Kapazität C_{dip} des dipolaren Pick-up bzw. des Strahlpositionsmonitors wie folgt bestimmen:

$$\boxed{C_{dip} = C_{self} + C_{opp}} . \quad (4.15)$$

Auch die Kapazität C_{mon} des monopolaren Pick-up bzw. des Strahlstrommonitors lässt sich analog durch die Summe der Ladungen ($Q_R + Q_L + Q_T + Q_B$) aller vier Elektroden berechnen als

$$\boxed{C_{mon} = C_{self}} . \quad (4.16)$$

Weitere Details zur kapazitiven Kopplung zwischen den Elektroden sind auch in [61] zu finden.

4.1.4 Frequenzverhalten eines kapazitiven Pick-up

4.1.4.1 Herleitung der gesamten Transferimpedanz einer Platte

Das Kleinsignal-Ersatzschaltbild kapazitiver Pick-ups, erstellt in enger Anlehnung an [29], ist in Abb. 4.5 zu sehen. $I_{im}(t)$ in der Abbildung steht für den Spiegelstrom auf der Elektrode.

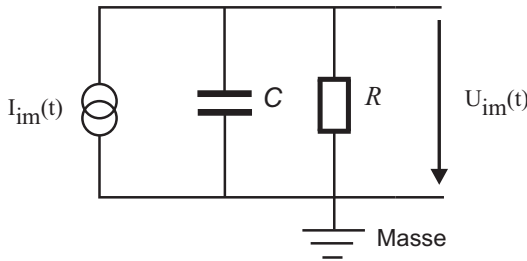


Abbildung 4.5.: Kleinsignal-Ersatzschaltbild des in Abb. 4.3 dargestellten kapazitiven Pick-up.

Angenommen, dass der Strahl rund ist und in der Mitte des Strahlrohres liegt und der Strahlstrom zeitharmonisch ($i_b(t) = I_0 e^{j\omega t}$) ist, ist die an jeder Elektrode (wel-

che in den Abbildungen 4.1 und 4.2 dargestellt sind) induzierte Spannung $U(\omega)$ im Frequenzbereich [51, 29]:

$$\begin{aligned}
 U(\omega) &= U_{im}(\omega) = Z_{ges} \cdot I_{im}(\omega) \\
 &= \frac{R}{1 + j\omega RC} \cdot I_{im}(\omega) \quad \text{mit} \quad I_{im}(\omega) = \frac{1}{\beta c} \frac{A}{2\pi b} j\omega I_b(\omega) \\
 &= \frac{1}{\beta c} \frac{1}{C} \frac{A}{2\pi b} \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC} \cdot I_b(\omega) \\
 &= V_0 \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC} \cdot I_b(\omega), \quad \text{mit} \quad V_0 = \frac{1}{\beta c} \frac{1}{C} \frac{A}{2\pi b} \\
 &= V_0 \frac{j\omega/\omega_g}{1 + j\omega/\omega_g} \cdot I_b(\omega), \quad \text{mit} \quad \omega_g = 2\pi f_g = \frac{1}{RC} \quad (4.17) \\
 &= Z_T(\omega) \cdot I_b(\omega). \quad (4.18)
 \end{aligned}$$

wobei $Z_T(\omega)$ die Transferimpedanz jeder Elektrode bezeichnet. A ist die Elektrodenfläche, β die normierte Strahlgeschwindigkeit, c die Lichtgeschwindigkeit im Freiraum, R der Abschlusswiderstand, C bezeichnet die kapazitive Kopplung zwischen der Elektrode und der Masse (Strahlrohr). Aus Gl. (4.18) ist deutlich zu erkennen, dass jede Elektrode in den Abbildungen 4.2 und 4.1 ein Hochpass-Verhalten mit der 3-dB-Grenzfrequenz $f_g = 1/(2\pi RC)$ aufweist, wie das auch in der untenstehenden Abbildung zu sehen ist.

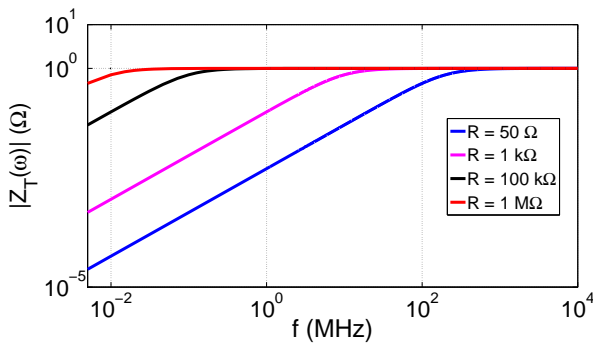


Abbildung 4.6.: Betrag der Transferimpedanz als Funktion der Frequenz für verschiedene Werte des Abschlusswiderstandes R ; $V_0 = 1 \Omega$, $C = 16.41 \text{ pF}$.

Fallunterscheidung

- *Niederohmiger Abschlusswiderstand R*

Ein niederohmiger Abschlusswiderstand führt zu einer hohen 3-dB Grenzfrequenz f_g . Z.B. ergibt sich für einen Wert von $R = 50 \, \Omega$ eine Grenzfrequenz $f_g = 1/(2\pi RC) \approx 194 \, \text{MHz}$, wie man das in der Abb. 4.6 (blaue Kurve) erkennen kann.

Bei LINACs und Elektronensynchrotronen, deren Strahlen aufgrund der hohen Beschleunigungsfrequenz (100 MHz bis 3 GHz) kurz sind, werden niederohmige Abschlusswiderstände R realisiert. $50 \, \Omega$ wird meist benutzt, um Reflexionen zu verhindern und eine glatte Signalverarbeitung mit einer breiten Bandbreite bis einige GHz zu ermöglichen. Wenn die Eigenkapazität C der Elektrode einige pF beträgt, wie das in Abb. 4.6 der Fall ist, führt ein Abschlusswiderstand von $50 \, \Omega$ dazu, dass niedrige Frequenzen nicht übertragen werden. In diesem Fall erfolgt die Messung des Ausgangssignals meist bei hohen Frequenzen.

- *Hochohmiger Abschlusswiderstand R*

Wird hingegen ein hochohmiger Widerstand an den Ausgang der Elektrode angeschlossen, führt dies zu einer niedrigen 3-dB-Grenzfrequenz f_g . Betrachtet man beispielsweise die rote Kurve in Abb. 4.6, welche dem Abschlusswiderstand $R = 1 \, \text{M}\Omega$ entspricht, sieht man ganz deutlich, dass die Grenzfrequenz bei ungefähr 9.7 kHz liegt. In der Praxis werden Signale aus den Pick-up-Elektroden im Allgemeinen via einem Kabel mit einer Leitungsimpedanz von $50 \, \Omega$ oder $75 \, \Omega$ zum Netzwerkanalysator geleitet. Um eine Niederfrequenz-Messung z.B. im Bereich von einigen kHz oder im niedrigen MHz-Bereich zu gewährleisten, wie das bei langen Teilchenpaketen in einem Protonensynchrotron oder Schwerionensynchrotron der Fall ist, wird zwischen dem Kabel und dem Elektrodenausgang ein Impedanzwandler angeschlossen, welcher die Impedanz des Kabels zu einer hohen Eingangsimpedanz R_i , zum Beispiel $1 \, \text{M}\Omega$, transformiert. In diesem Fall werden fast alle Frequenzanteile des Strahlstromes von den Elektroden durchgelassen. Demzufolge weist die Form der Ausgangsspannung $u(t)$ im Zeitbereich eine Proportionalität zum Strahlstrom $i_b(t)$ auf. Mathematisch betrachtet bedeutet dies, dass die Transferimpedanz Z_T in diesem Fall als eine Konstante angesehen werden kann.

4.1.4.2 Berechnung der Transferimpedanz des quadrupolaren Pick-up

Ausgehend von Gleichungen (4.1), (4.3), (4.5), (4.6) und in Anlehnung an [6] kann sich auch die gesamte Transferimpedanz Z_T einer Elektrode als Summe der

einzelnen Transferimpedanzen der Multipolmomente wie folgt verallgemeinern lassen:

$$Z_T = Z^{(0)} + Z^{(1x)} \cdot \bar{x} \cdot \cos(\varphi) + Z^{(1y)} \cdot \bar{y} \cdot \sin(\varphi) + Z^{(2)} \cdot \kappa \cdot \cos(2\varphi) + \dots \quad (4.19)$$

wobei φ die Position der Elektrode in der (x, y) - bzw. (ϱ, φ) -Ebene ist. $Z^{(0)}, Z^{(1x)}, Z^{(1y)}$ und $Z^{(2)}$ stehen für die Transferimpedanzen des Monopol-, Dipol- und Quadrupolmoments der Platte. $\kappa = (\sigma_x^2 - \sigma_y^2 + \bar{x}^2 - \bar{y}^2)$

- *Rechte Elektrode R:* $\varphi = 0^\circ$

$$\Rightarrow Z_T^R = Z^{(0)} + Z^{(1x)} \cdot \bar{x} + Z^{(2)} \cdot \kappa + \dots \quad (4.20)$$

- *Obere Elektrode T:* $\varphi = 90^\circ$

$$\Rightarrow Z_T^T = Z^{(0)} + Z^{(1y)} \cdot \bar{y} - Z^{(2)} \cdot \kappa + \dots \quad (4.21)$$

- *Linke Elektrode L:* $\varphi = 180^\circ$

$$\Rightarrow Z_T^L = Z^{(0)} - Z^{(1x)} \cdot \bar{x} + Z^{(2)} \cdot \kappa + \dots \quad (4.22)$$

- *Untere Elektrode B:* $\varphi = 270^\circ$

$$\Rightarrow Z_T^B = Z^{(0)} - Z^{(1y)} \cdot \bar{y} - Z^{(2)} \cdot \kappa + \dots \quad (4.23)$$

Die Transferimpedanz Z_T^Ξ bzw. $Z_T^{\Xi'}$ des quadrupolaren Pick-up lässt sich dann wie folgt bestimmen:

$$\begin{aligned} Z_T^\Xi &= (Z_T^R + Z_T^L) - (Z_T^T + Z_T^B) \\ &= 4 \cdot Z^{(2)} \cdot \kappa \\ &= Z_T^{\Xi'} \cdot \kappa, \text{ mit } Z_T^{\Xi'} = 4 \cdot Z^{(2)}. \end{aligned} \quad (4.24)$$

4.2 Magnetische Pick-ups

Wie schon am Anfang dieses Kapitels erwähnt, wird in diesem Abschnitt nur die Funktionsweise von magnetischen Pick-ups erläutert. Eine detaillierte Arbeit über magnetische quadrupolare Pick-ups ist in [6, 47, 48, 49] ausführlich beschrieben.

Der durch die Bewegung von gebündelten Teilchenstrahlen entstandene zeitlich veränderte Strahlstrom erzeugt eine zeitlich abhängige magnetische Induktion \vec{B} . Im Inneren einer geschlossenen Leiterschleife, welche durch einen Teil des zu \vec{B} gehörenden magnetischen Flusses hindurchgegangen ist, wird ein elektrischer Strom induziert. Mit anderen Worten, magnetische Pick-ups messen den magnetischen Fluss durch den in geschlossenen Leiterschleifen induzierten Strom. Der magnetische Fluss Φ_m ist definiert als:

$$\Phi_m = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} , \quad (4.25)$$

wobei S die Fläche der Leiterschleife ist. Ein typisches magnetisches Pick-up ist in Abb. 4.7 veranschaulicht. Es besteht aus vier Loopantennen (R, T, L und B), welche die durch den Strahlstrom erzeugte azimutale Komponente des magnetischen Feldes messen.

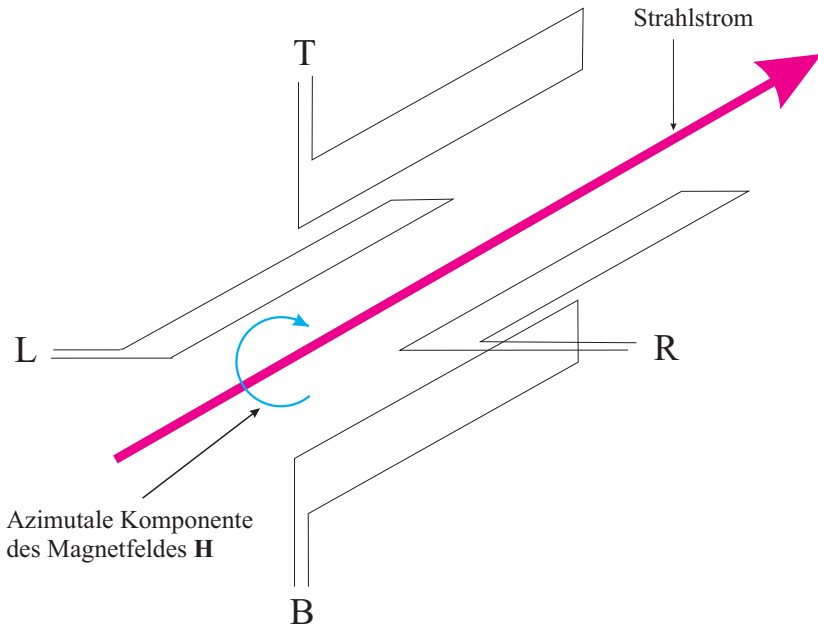


Abbildung 4.7.: Typisches magnetisches Pick-up-Design. Das Bild wurde in enger Anlehnung an [6] erstellt.

Die induzierte Spannung $U(\omega)$ an einem an die Loopantennen angeschlossenen Widerstand R lässt sich im Frequenzbereich wie folgt berechnen [6]:

$$\begin{aligned}
 U(\omega) &= -j\omega\Phi_m \\
 &= I_b(\omega) \frac{M}{L} \frac{R\omega}{\omega - j\frac{R}{L}} \\
 U(\omega) &= I_b(\omega) M \frac{j\omega}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}}, \quad \text{mit } \omega_c = \frac{R}{L}.
 \end{aligned} \tag{4.26}$$

wobei L und M die Selbst- und Gegeninduktivitäten bezeichnen. $I_b(\omega)$ steht für den Strahlstrom im Frequenzbereich.

4.3 Stripline

Elektrostatische Pick-ups werden im Allgemeinen für Strahlen, deren Länge viel größer als die Elektrodenlänge ist, verwendet. Wenn nun die Länge der Teilchenpakete in der Größenordnung der Elektrodenlänge liegt, führt die endliche Ausbreitungszeit bei kapazitiven Sensoren zur Verformung des Signals. Darüber hinaus müssen elektrostatische Pick-ups für kurze Strahlen klein sein und können dementsprechend nur eine niedrige Signalstärke liefern. Stripline-Pick-ups sind hingegen für die Beobachtung kurzer Strahlen sehr gut geeignet, weil die Signalausbreitung im Design wie die in Übertragungsleitungen in der Mikrowellentechnik betrachtet wird.

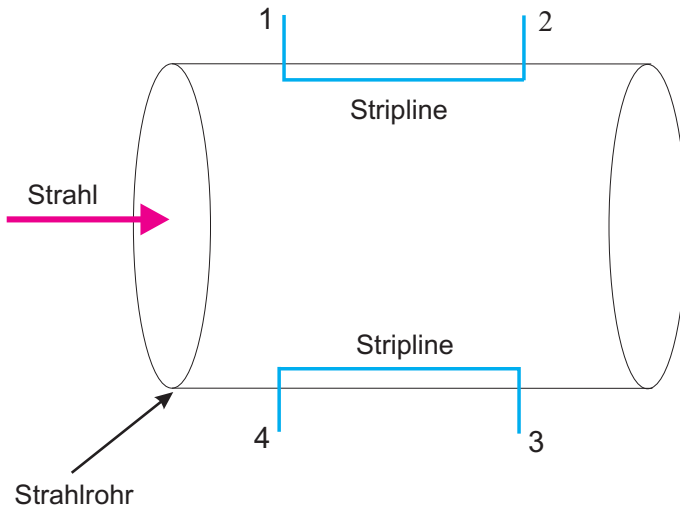


Abbildung 4.8.: Typisches Stripline-Pick-up-Design. Das Bild wurde in Anlehnung an [54] erstellt.

Ein Stripline-Pick-up (siehe Abb. 4.8) besteht aus einer Übertragungsleitung, deren Länge in der Größenordnung von einigen cm liegt, mit einer Durchführung an deren beiden Enden mit Impedanzen, welche auf eine Impedanz von $50\ \Omega$ angepasst werden.

Eine detaillierte Funktionsweise von Stripline BPM (Beam Position Monitor, auf Deutsch Strahlpositionsmonitor) wird in [57, 29] ausführlich beschrieben.

5 Methoden zur Messung des quadrupolaren Moments eines Teilchenstrahls

Wie bereits in der Einleitung erwähnt, geht es in dieser Arbeit unter anderem um die Entwicklung einer Methode zur Messung der Strahlelliptizität ($\sigma_x^2 - \sigma_y^2$). Schaut man die durch die Gleichungen (4.1), (4.5), (4.3) und (4.6) beschriebenen Signale am Ausgang der Elektroden R, L, T und B (siehe Abb. 4.1) an, erkennt man, dass die zu messende Information ($\sigma_x^2 - \sigma_y^2$) am einfachsten aus dem normierten quadrupolaren Term z_2 extrahiert werden kann. Dennoch müssen bestimmte Signalkombinationen der Ausgangsspannungen U_R , U_L , U_T und U_B durchgeführt werden, um z_2 zu bestimmen und gleichzeitig die anderen vorhandenen Multipolterme zu eliminieren. Die zwei bekanntesten Kombinationsmethoden zur Messung des quadrupolaren Signals, nämlich die *difference over sum*- und die *log ratio*-Methode werden im Abschnitt 5.1 ausführlich beschrieben. Anschließend wird im Abschnitt 5.2 auf das in dieser Arbeit entwickelte Verfahren eingegangen.

5.1 Grundlegende Verfahren

5.1.1 Difference over sum

5.1.1.1 Beschreibung und praktische Realisierung der Methode

Die Funktionsweise dieser Methode beruht, wie ihr Name schon verrät, darauf, die Differenz zwischen den horizontalen und vertikalen Elektrodensignalen zu bilden und sie durch die Summe aller Plattensignale zu dividieren. Dies hat den Vorteil, dass das daraus entstehende Signal weder vom Strahlstrom noch von einem Teil der Elektrodengeometrie abhängt, und führt dementsprechend zu einer einfacheren Bestimmung des quadrupolaren Moments.

Das einfachste Vorgehen zur Realisierung der *difference over sum* in der Praxis besteht darin, mit Diodendetektoren die HF-Signale zu messen, um analoge Signale

zu erzeugen, welche proportional zu den HF-Hüllenamplituden sind. Diese Signale können digitalisiert und dann verarbeitet werden, oder sie können in analogen Schaltungen verarbeitet werden, um ein Δ/Σ (difference over sum)-Signal zu erhalten, welches dann mithilfe einer Analog-Digital-Umwandlung digitalisiert werden kann [33]. Ein Vorteil des Δ/Σ -Verfahrens liegt darin, dass es auch im Zeitbereich durchgeführt werden kann, indem man mit einem Spitzenwert-Detektor (z.B. Dioden) die Spitzenspannung am Ausgang jeder Elektrode misst. Von allen Verarbeitungsverfahren zur Bestimmung des quadrupolaren Signals ist die Δ/Σ -Methode am einfachsten zu implementieren und somit die beliebteste.

5.1.1.2 Analytische Bestimmung von $\sigma_x^2 - \sigma_y^2$

Normierte Multipolterme bis zur dritten Ordnung sind mithilfe der Gleichungen (4.1), (4.3), (4.5) und (4.6) in der nachfolgenden Tabelle zusammengefasst.

	R	L	T	B
Monopole	1	1	1	1
Dipole	z_{1x}	$-z_{1x}$	z_{1y}	$-z_{1y}$
Quadrupole	z_2	z_2	$-z_2$	$-z_2$
Sextupole	z_{3x}	$-z_{3x}$	$-z_{3y}$	z_{3y}

Tabelle 5.1.: Normierte Multipolterme am Ausgang jeder Elektrode aus den Gleichungen (4.1), (4.3), (4.5) und (4.6).

Anhand der Tabelle 5.1 ist deutlich zu erkennen, dass sich z_2 am einfachsten aus der Differenz zwischen der Summe horizontaler Elektrodensignale und der Summe vertikaler Elektrodensignale, geteilt durch die Summe aller Elektrodensignalen, ergibt:

$$\Xi_{\Delta/\Sigma} = \frac{(U_R + U_L) - (U_T + U_B)}{U_R + U_L + U_T + U_B} \quad (5.1)$$

$$\Xi_{\Delta/\Sigma} = z_2 = 2 \frac{\sin(\alpha)}{\alpha} \left(\frac{\sigma_x^2 - \sigma_y^2}{b^2} + \frac{\bar{x}^2 - \bar{y}^2}{b^2} \right). \quad (5.2)$$

wobei U_R , U_L , U_T und U_B die Spannungssignale am Ausgang der rechten, linken, oberen und unteren Platten bezeichnen.

Die durch Gl. (5.1) beschriebene Methode ist in der Beschleunigerphysik als *difference over sum* bekannt. Das quadrupolare Signal $\Xi_{\Delta/\Sigma}$ aus dieser Methode ist vom Strahlstrom i_b unabhängig. Darüber hinaus hängt $\Xi_{\Delta/\Sigma}$ nicht nur vom quadrupolaren Moment ($\sigma_x^2 - \sigma_y^2$), sondern auch von der Strahlposition ab. Aus Gl. (5.2) lässt sich die RMS-Strahldimension wie folgt bestimmen:

$$\begin{aligned}\Xi_{\Delta/\Sigma} &= 2 \frac{\sin(\alpha)}{\alpha} \left(\frac{\sigma_x^2 - \sigma_y^2}{b^2} + \frac{\bar{x}^2 - \bar{y}^2}{b^2} \right), \\ \Rightarrow \sigma_x^2 - \sigma_y^2 &= \frac{\Xi_{\Delta/\Sigma}}{S_{\Delta/\Sigma}} - (\bar{x}^2 - \bar{y}^2), \quad S_{\Delta/\Sigma} = 2 \frac{1}{b^2} \frac{\sin(\alpha)}{\alpha}. \quad (5.3)\end{aligned}$$

wobei $S_{\Delta/\Sigma}$ die Sensitivität des quadrupolaren Pick-up ist. Die Strahlposition (\bar{x}, \bar{y}) in Gl. (5.3) kann aus den dipolaren Signalen Δ_x und Δ_y , welche sich ebenfalls anhand der Tabelle 5.1 durch die Differenzbildung der Signale der gegenüberliegenden Elektroden bestimmen lassen, hergeleitet werden:

$$\Delta_x = \frac{U_R - U_L}{U_R + U_L} \quad (5.4)$$

$$= z_{1x} + z_{3x} = 4 \frac{\sin(\alpha/2)}{\alpha} \frac{\bar{x}}{b} + z_{3x}$$

$$\Delta_x = S_{\Delta_x} \cdot \bar{x} + z_{3x}, \quad S_{\Delta_x} = 4 \frac{1}{b} \frac{\sin(\alpha/2)}{\alpha}. \quad (5.5)$$

$$\Delta_y = \frac{U_T - U_B}{U_T + U_B} \quad (5.6)$$

$$= z_{1y} - z_{3y} = 4 \frac{\sin(\alpha/2)}{\alpha} \frac{\bar{y}}{b} - z_{3y}$$

$$\Delta_y = S_{\Delta_y} \cdot \bar{y} - z_{3y}, \quad S_{\Delta_y} = 4 \frac{1}{b} \frac{\sin(\alpha/2)}{\alpha}, \quad (5.7)$$

mit $S_{\Delta_x} = S_{\Delta_y}$ der Sensitivität des dipolaren Pick-up. z_{1x} , z_{1y} , z_{3x} und z_{3y} bezeichnen die auf den Monopolterm normierten Multipolterme, beschrieben durch die Gleichungen (4.2) und (4.4). Nachdem \bar{x} und \bar{y} aus den Gleichungen (5.5) und

(5.7) unter Vernachlässigung der sextupolaren Terme z_{3x} und z_{3y} bestimmt und in die Gleichung (5.3) eingesetzt wurden, ergibt sich:

$$\sigma_x^2 - \sigma_y^2 = \frac{\Xi_{\Delta/\Sigma}}{S_{\Delta/\Sigma}} - \left[\left(\frac{\Delta_x}{S_{\Delta_x}} \right)^2 - \left(\frac{\Delta_y}{S_{\Delta_y}} \right)^2 \right]. \quad (5.8)$$

5.1.2 Log ratio

5.1.2.1 Beschreibung und praktische Realisierung der Methode

Die Funktionsweise der *log ratio*-Methode beruht darauf, das Signal am Ausgang jeder Elektrode logarithmisch zu verstärken, bevor es weiter verarbeitet wird. Die daraus entstehenden Ausgangssignale lassen sich durch die logarithmische Verstärkung der in den Gleichungen (4.1), (4.3), (4.5) und (4.6) beschriebenen Signale bestimmen. Bei dieser Methode wird an den Ausgang jeder Platte ein logarithmischer Detektor zur Verstärkung des Signals angeschlossen. Danach wird auf die verstärkten Signale ein Tief- bzw. Bandpassfilter angewandt, um nur die Frequenzen von Interesse durchlassen zu können und dementsprechend das Rauschsignal zu reduzieren. Mithilfe eines Operationsverstärkers wird die Differenz zwischen $\log(U_R)$ und $\log(U_T)$ durchgeführt, welche $\log(U_R/U_T)$ ergibt. Das Gleiche wird auch bei den linken und unteren Elektroden angewandt, um $\log(U_L/U_B)$ zu erhalten. Anschließend, werden die Signale $\log(U_R/U_T)$ und $\log(U_L/U_B)$ analog mit einem passiven Kombiner wie zum Beispiel dem 180° -Hybrid-Koppler addiert.

Der Vorteil der *log ratio*-Methode ist der große dynamische Bereich ohne Verstärkungsschaltungen [57]. Außerdem weist die *log ratio*-Technik eine bessere Linearität zur Strahlposition für kreisförmige Strahlpositionsmonitore als die anderen Methoden auf [41]. Einer der Nachteile dieser Signalverarbeitungsmethode ist die relativ niedrige Temperaturstabilität [57].

Einer der meist verwendeten logarithmischen Verstärker ist der von der Firma ADC (Analog Devices Corporation) kommerzialisierte AD640, welcher einen dynamischen Bereich bis zu 50 dB im Frequenzbereich von 0 bis 120 MHz liefert [41]. Die Funktionsweise dieses Verstärkers wird in einem Datenblatt in [59] ausführlich und detailliert dargestellt.

Weitere Details zur praktischen Realisierung der *log ratio*-Methode können in [37, 38, 39, 40] nachgelesen werden.

5.1.2.2 Analytische Bestimmung von $\sigma_x^2 - \sigma_y^2$

Zunächst wird nur das Signal U_R^{log} am Ausgang der rechten Platte R behandelt und die Signale aus den anderen Elektroden werden dann analog abgeleitet. In Anlehnung an [2] wird im Folgenden das Spannungssignal U_R^{log} an der rechten Elektrode ausführlich und detailliert hergeleitet.

$$\begin{aligned}
 U_R^{log} &= 20 \cdot \log(U_R) = 20 \cdot \log\left(\frac{\alpha \cdot i_b}{2\pi b} \left[1 + z_{1x} + z_2 + z_{3x} + \dots\right]\right) \\
 &= 20 \cdot \log\left(\frac{\alpha \cdot i_b}{2\pi b}\right) + 20 \cdot \log\left(1 + z_{1x} + z_2 + z_{3x} + \dots\right) \\
 U_R^{log} &= 20 \cdot \log\left(\frac{\alpha \cdot i_b}{2\pi b}\right) + \frac{20}{\ln(10)} \cdot \overbrace{\ln\left(1 + z_{1x} + z_2 + z_{3x} + \dots\right)}^W. \quad (5.9)
 \end{aligned}$$

Nach der folgenden Formel [34]

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} \pm \dots \quad -1 < x \leq 1, \quad (5.10)$$

mit anderen Worten, wenn die Summe aller anderen Multipolsignale (*Dipole* + *Quadrupole* + *Sextupole* + ...) kleiner als das Monopolsignal ist, ergibt sich folgender Ausdruck für W :

$$\begin{aligned}
 W &= \left(X - \frac{X^2}{2} + \frac{X^3}{3} + \dots\right) \\
 &= \left(z_{1x} + z_2 + z_{3x} - \frac{(z_{1x} + z_2 + z_{3x})^2}{2} + \frac{(z_{1x} + z_2 + z_{3x})^3}{3} + \dots\right) \\
 W &= \left(z_{1x} + z_2 + z_{3x} - \frac{z_{1x}^2}{2} - z_{1x}z_2 - z_{1x}z_{3x} - \frac{z_2^2}{2} + \frac{z_{1x}^3}{3} + z_{1x}^2z_2 - \frac{z_{1x}^4}{4}\right).
 \end{aligned}$$

Bei der Berechnung von W wurden nur Terme bis zur vierten Ordnung berücksichtigt. Wird W nun in die Gleichung (5.9) eingesetzt, ergibt

$$U_R^{log} = 20 \cdot \log \left(\frac{\alpha \cdot i_b}{2\pi} \right) + \frac{20}{\ln(10)} \cdot \left(z_{1x} + z_2 + z_{3x} - \frac{z_{1x}^2}{2} - z_{1x} \cdot z_2 - z_{1x} \cdot z_{3x} - \frac{z_2^2}{2} + \frac{z_{1x}^3}{3} + z_{1x}^2 z_2 - \frac{z_{1x}^4}{4} \right). \quad (5.11)$$

Die anderen Elektrodensignale lassen sich analog zur V_R^{log} bestimmen:

$$U_L^{log} = 20 \cdot \log \left(\frac{\alpha \cdot i_b}{2\pi} \right) + \frac{20}{\ln(10)} \cdot \left(-z_{1x} + z_2 - z_{3x} - \frac{z_{1x}^2}{2} + z_{1x} \cdot z_2 - z_{1x} \cdot z_{3x} - \frac{z_2^2}{2} - \frac{z_{1x}^3}{3} + z_{1x}^2 \cdot z_2 - \frac{z_{1x}^4}{4} \right), \quad (5.12)$$

$$U_T^{log} = 20 \cdot \log \left(\frac{\alpha \cdot i_b}{2\pi} \right) + \frac{20}{\ln(10)} \cdot \left(z_{1y} - z_2 - z_{3y} - \frac{z_{1y}^2}{2} + z_{1y} \cdot z_2 + z_{1y} \cdot z_{3y} - \frac{z_2^2}{2} + \frac{z_{1y}^3}{3} - z_{1y}^2 z_2 - \frac{z_{1y}^4}{4} \right), \quad (5.13)$$

$$U_B^{log} = 20 \cdot \log \left(\frac{\alpha \cdot i_b}{2\pi} \right) + \frac{20}{\ln(10)} \cdot \left(-z_{1y} - z_2 + z_{3y} - \frac{z_{1y}^2}{2} - z_{1y} \cdot z_2 + z_{1y} \cdot z_{3y} - \frac{z_2^2}{2} - \frac{z_{1y}^3}{3} - z_{1y}^2 z_2 - \frac{z_{1y}^4}{4} \right). \quad (5.14)$$

Wie bei der *difference over sum*-Methode ergibt sich auch das quadrupolare Signal Ξ_{log} aus der Differenz zwischen der Summe horizontaler Elektrodensignale und der Summe vertikaler Elektrodensignale:

$$\Xi_{log} = (U_R^{log} + U_L^{log}) - (U_T^{log} + U_B^{log}) = 20 \cdot \log \left(\frac{U_R \cdot U_L}{U_T \cdot U_B} \right) \quad (5.15)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{20}{\ln(10)} \left[4 z_2 - z_{1x}^2 + z_{1y}^2 - 2 z_{1x} \cdot z_{3x} \right. \\
&\quad \left. - 2 z_{1y} \cdot z_{3y} - \left(\frac{z_{1x}^4 - z_{1y}^4}{2} \right) \right] \\
&= \frac{80}{\ln(10)} \left[z_2 - \frac{z_{1x}^2 - z_{1y}^2}{4} \right] + O \left(\frac{1}{b^4} \right) \quad (5.16)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{160}{\ln(10)} \frac{\sin(\alpha)}{\alpha} \left[\frac{\sigma_x^2 - \sigma_y^2}{b^2} + \underbrace{\left(1 - \frac{\tan(\alpha/2)}{\alpha} \right)}_m \frac{\bar{x}^2 - \bar{y}^2}{b^2} \right] \\
&\quad + O \left(\frac{1}{b^4} \right). \quad (5.17)
\end{aligned}$$

wobei z_{1x} , z_{1y} und z_2 durch ihre Werte aus Gln. (4.2) und (4.4) ersetzt wurden. Analog zur *difference over sum*-Methode kann aus Gl. (5.17) unter Vernachlässigung des vierten Ordnungsterms $O(1/b^4)$ das Quadrupolmoment $\sigma_x^2 - \sigma_y^2$ wie folgt bestimmt werden:

$$\begin{aligned}
\Xi_{log} &= \frac{160}{\ln(10)} \frac{\sin(\alpha)}{\alpha} \left[\frac{\sigma_x^2 - \sigma_y^2}{b^2} + \left(1 - \frac{\tan(\alpha/2)}{\alpha} \right) \frac{\bar{x}^2 - \bar{y}^2}{b^2} \right], \\
\Rightarrow \sigma_x^2 - \sigma_y^2 &= \frac{\Xi_{log}}{S_{log}} - \left(1 - \frac{\tan(\alpha/2)}{\alpha} \right) (\bar{x}^2 - \bar{y}^2), \quad (5.18)
\end{aligned}$$

$$S_{log} = \frac{160}{\ln(10)} \frac{1}{b^2} \frac{\sin(\alpha)}{\alpha}, \quad (5.19)$$

wobei S_{log} die Sensitivität des quadrupolaren Pick-up bezüglich der *log ratio*-Methode ist. Wie bei der im Abschnitt 5.1.1 beschriebenen Methode muss auch bei dieser Methode der Anteil der Strahlposition, welcher sich aus den dipolaren

Signalen $\Delta_{x,\log}$ und $\Delta_{y,\log}$ bestimmen lässt, vom quadrupolaren Signal abgezogen werden, um die RMS-Stralldimension zu bestimmen:

$$\begin{aligned}
 \Delta_{x,\log} &= 20 \cdot \log \left(\frac{U_R}{U_L} \right) \\
 &= U_R^{\log} - U_L^{\log} = \frac{40}{\ln(10)} \left(z_{1x} + z_{3x} - z_{1x} \cdot z_2 + \frac{z_{1x}^3}{3} \right) \\
 &= \frac{40}{\ln(10)} z_{1x} + O \left(\frac{1}{b^3} \right) \\
 &= \frac{160}{\ln(10)} \frac{\sin(\alpha/2)}{\alpha} \frac{\bar{x}}{b} + O \left(\frac{1}{b^3} \right) \\
 \Delta_{x,\log} &= S_{\Delta_{x,\log}} \cdot \bar{x} + O \left(\frac{1}{b^3} \right), \quad S_{\Delta_{x,\log}} = \frac{160}{\ln(10)} \frac{1}{b} \frac{\sin(\alpha/2)}{\alpha}. \quad (5.20)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Delta_{y,\log} &= 20 \cdot \log \left(\frac{U_T}{U_B} \right) \\
 &= U_T^{\log} - U_B^{\log} = \frac{40}{\ln(10)} \left(z_{1y} - z_{3y} + z_{1y} \cdot z_2 + \frac{z_{1y}^3}{3} \right) \\
 &= \frac{40}{\ln(10)} z_{1y} + O \left(\frac{1}{b^3} \right) \\
 &= \frac{160}{\ln(10)} \frac{\sin(\alpha/2)}{\alpha} \frac{\bar{y}}{b} + O \left(\frac{1}{b^3} \right) \\
 \Delta_{y,\log} &= S_{\Delta_{y,\log}} \cdot \bar{y} + O \left(\frac{1}{b^3} \right), \quad S_{\Delta_{y,\log}} = \frac{160}{\ln(10)} \frac{1}{b} \frac{\sin(\alpha/2)}{\alpha}. \quad (5.21)
 \end{aligned}$$

In den obigen Gleichungen stehen $S_{\Delta_{x,\log}}$ und $S_{\Delta_{y,\log}}$ für die Sensitivitäten des dipolaren Pick-up in der transversalen Ebene (x , y). Nachdem \bar{x} und \bar{y} aus den Gleichungen (5.20) und (5.21) unter Vernachlässigung des dritten Ordnungsterms $O(1/b^3)$ bestimmt und in die Gleichung (5.18) eingesetzt wurden, ergibt sich:

$$\sigma_x^2 - \sigma_y^2 = \frac{\Xi_{log}}{S_{log}} - \left(1 - \frac{\tan(\alpha/2)}{\alpha}\right) \left[\left(\frac{\Delta_{x,log}}{S_{\Delta_{x,log}}}\right)^2 - \left(\frac{\Delta_{y,log}}{S_{\Delta_{y,log}}}\right)^2 \right]. \quad (5.22)$$

5.2 Modifizierte log ratio-Methode

5.2.1 Beschreibung des Verfahrens

Anhand der Gleichung (5.17) sieht man, dass für alle Elektrodenwinkel α der Faktor m vor dem Anteil der Strahlposition im quadrupolaren Signal Ξ_{log} kleiner oder gleich 0.5 ist. Verglichen mit der *difference over sum* (siehe Gl. (5.2)), wo der Faktor vor dem Anteil der quadratischen Strahlposition den Wert 1 beträgt, ist deutlich erkennbar, dass die *log ratio*-Methode in Bezug auf das quadrupolare Signal eine niedrigere Abhängigkeit von der Strahlposition liefert und dementsprechend der Ausgangspunkt für die in dieser Arbeit entwickelte Methode ist. Das Ziel dieser Methode besteht darin, durch bestimmte Signalkombinationen den durch die logarithmische Entwicklung von $\ln(1+x)$ entstandenen Faktor m vor dem quadratischen Anteil der Strahlposition in Gl. (5.17) auf Null zu bringen.

Da die ersten Ordnungsterme z_{1x} und z_{1y} durch die bereits oben erwähnte logarithmische Entwicklung von $\ln(1+x)$ (siehe Gl. (5.16)) zur Entstehung von m beigetragen haben, werden sie (z_{1x} und z_{1y}) bei dieser Methode so modifiziert, dass der dadurch sich neue ergebende Faktor m verschwindet. Dies geschieht, indem zum Ausgangssignal jeder Elektrode ein gewichtetes dipolares Signal mit dem Gewichtungsfaktor c_x bzw. c_y addiert wird, wobei mit *dipolares Signal* das Signal aus der Differenzbildung der Signale der gegenüberliegenden Elektroden gemeint ist. Dabei ist zu beachten, dass zum Beispiel das zu dem Ausgangssignal der rechten Elektrode addierte gewichtete dipolare Signal $c_x \cdot (U_R - U_L)$ von dem Ausgangssignal der linken Elektrode abgezogen werden muss, damit später bei der Ausführung der Kombination zur Bestimmung des quadrupolaren Signals die anderen Multipolterme verschwinden. Das gilt auch für die vertikalen Platten. Eine bildliche Beschreibung der *modifizierte log ratio*-Methode ist in Abb. 5.1 dargestellt.

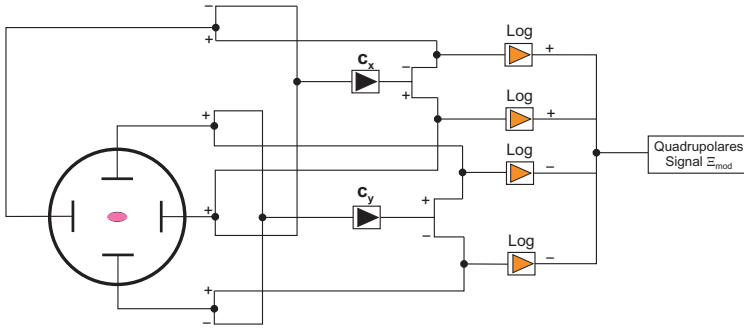


Abbildung 5.1.: Bildliche Beschreibung der *modifizierte log ratio*-Methode.

5.2.2 Analytische Bestimmung von $\sigma_x^2 - \sigma_y^2$

Nachdem das oben erwähnte gewichtete dipolare Signal zu allen Elektrodensignalen addiert wurde, ergeben sich:

$$\begin{aligned}
 U_R^{mod} &= U_R + c_x \cdot (U_R - U_L) \\
 &= \frac{i_b}{2\pi} \alpha \left[1 + z_{1x} + z_2 + z_{3x} + 2 c_x (z_{1x} + z_{3x}) + \dots \right] \\
 &= \frac{i_b}{2\pi} \alpha \left[1 + (1 + 2 c_x) z_{1x} + z_2 + (1 + 2 c_x) z_{3x} + \dots \right], \quad (5.23)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 U_L^{mod} &= U_L - c_x \cdot (U_R - U_L) \\
 &= \frac{i_b}{2\pi} \alpha \left[1 - z_{1x} + z_2 - z_{3x} - 2 c_x (z_{1x} + z_{3x}) + \dots \right] \\
 &= \frac{i_b}{2\pi} \alpha \left[1 - (1 + 2 c_x) z_{1x} + z_2 - (1 + 2 c_x) z_{3x} + \dots \right], \quad (5.24)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U_T^{mod} &= U_T + c_y \cdot (U_T - U_B) \\
&= \frac{i_b}{2\pi} \alpha \left[1 + z_{1y} - z_2 - z_{3y} + 2 c_y (z_{1y} - z_{3y}) + \dots \right] \\
&= \frac{i_b}{2\pi} \alpha \left[1 + (1 + 2 c_y) z_{1y} - z_2 - (1 + 2 c_y) z_{3y} + \dots \right], \quad (5.25)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U_B^{mod} &= U_B - c_y \cdot (U_T - U_B) \\
&= \frac{i_b}{2\pi} \alpha \left[1 - z_{1y} - z_2 + z_{3y} - 2 c_y (z_{1y} - z_{3y}) + \dots \right] \\
&= \frac{i_b}{2\pi} \alpha \left[1 - (1 + 2 c_y) z_{1y} - z_2 + (1 + 2 c_y) z_{3y} + \dots \right]. \quad (5.26)
\end{aligned}$$

Die in Gln. (5.23), (5.24), (5.25) und (5.26) in Blau markierten Werte sind die hinzugefügten gewichteten dipolaren Signale. Nachdem die in diesen Gleichungen erhaltenen Signale unter Anwendung der $\ln(1+x)$ -Eigenschaft in Gl. (5.10) logarithmisch verstärkt wurden, lässt sich das quadrupolare Signal Ξ_{mod} bezüglich der *modifizierte log ratio*-Methode analog wie das der *log ratio*-Methode bestimmen:

$$\Xi_{mod} = 20 \cdot \log \left(\frac{U_R^{mod} \cdot U_L^{mod}}{U_T^{mod} \cdot U_B^{mod}} \right) \quad (5.27)$$

$$\begin{aligned}
&= 20 \cdot \left[\log(U_R^{mod}) + \log(U_L^{mod}) - \log(U_T^{mod}) - \log(U_B^{mod}) \right] \\
&= \frac{20}{\ln(10)} \left[4 z_2 - (1 + 2 c_x)^2 z_{1x}^2 + (1 + 2 c_y)^2 z_{1y}^2 \right. \\
&\quad - 2 (1 + 2 c_x)^2 z_{1x} \cdot z_{3x} - 2 (1 + 2 c_y)^2 z_{1y} \cdot z_{3y} \\
&\quad \left. - \left(\frac{(1 + 2 c_x)^4 z_{1x}^4 - (1 + 2 c_y)^4 z_{1y}^4}{2} \right) \right] \\
&= \frac{80}{\ln(10)} \left[z_2 - \frac{(1 + 2 c_x)^2 z_{1x}^2 - (1 + 2 c_y)^2 z_{1y}^2}{4} \right] \quad (5.28) \\
&\quad + O\left(\frac{1}{b^4}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{160}{\ln(10)} \frac{\sin(\alpha)}{\alpha} \left[\frac{\sigma_x^2 - \sigma_y^2}{b^2} + \underbrace{\left(1 - (1 + 2 c_x)^2 \frac{\tan(\alpha/2)}{\alpha} \right)}_{m_x} \frac{\bar{x}^2}{b^2} \right. \\
&\quad \left. - \underbrace{\left(1 - (1 + 2 c_y)^2 \frac{\tan(\alpha/2)}{\alpha} \right)}_{m_y} \frac{\bar{y}^2}{b^2} \right] + O\left(\frac{1}{b^4}\right). \quad (5.29)
\end{aligned}$$

Nun müssen die Gewichtungsfaktoren c_x und c_y bestimmt werden, so dass m_x und m_y gleich Null sind.

$$m_x = 0 \implies c_x = -\frac{1}{2} \left(1 \mp \sqrt{\frac{\alpha}{\tan(\alpha/2)}} \right) . \quad (5.30)$$

$$m_y = 0 \implies c_y = -\frac{1}{2} \left(1 \mp \sqrt{\frac{\alpha}{\tan(\alpha/2)}} \right) .$$

Aus der obigen Gleichung sieht man, dass c_x und c_y erwartungsgemäß gleich sind, da das hier analytisch untersuchte Pick-up (siehe Abb. 4.1) symmetrisch bezüglich der vertikalen und horizontalen Achsen ist. Für einen Elektrodenwinkel von $\alpha = 45^\circ$ zum Beispiel ergeben sich gemäß Gl. (5.30) die Gewichtungsfaktoren $c_x = c_y = c = 0.1185$ und -1.1885 . Wenn aber z.B. die Elektrodenbreite in horizontaler Ebene nicht gleich der in vertikaler Ebene ist, führt dies dazu, dass c_x ungleich c_y wird.

Durch geeignete Werte der Verstärkungs- bzw. Dämpfungsfaktoren aus Gl. (5.30) und unter Vernachlässigung des vierten Ordnungsterms ergibt sich hier bei dieser Methode ein quadrupolares Signal, das nicht von der Strahlposition abhängt. Die RMS-Strahldimension $\sigma_x^2 - \sigma_y^2$ lässt sich dann in diesem Fall einfach durch das Verhältnis von Ξ_{mod} zu der Sensitivität des Pick-up, welche in dieser Methode gleich der der *log ratio*-Methode ist, bestimmen:

$$\sigma_x^2 - \sigma_y^2 = \frac{\Xi_{mod}}{S_{log}} . \quad (5.31)$$

In Abb. 5.2 ist das mit allen drei Methoden erhaltene quadrupolare Moment für verschiedene Werte der Strahlposition (\bar{x}, \bar{y}) dargestellt. Dieses normierte Moment wurde erhalten, nachdem zunächst das quadrupolare Signal Ξ gemäß Gleichungen (5.1), (5.15) und (5.27) berechnet und davon der Anteil der Strahlposition gemäß Gleichungen (5.8), (5.22) und (5.31) abgezogen wurde. Für das obere Bild wurde die vertikale Position \bar{y} des Strahls festgehalten, während die auf den Pick-up-Radius b normierte horizontale Position \bar{x}/b in einem Bereich von 0 bis 0.25 variiert wurde. Im unteren Bild der Abbildung 5.2 wurde hingegen \bar{x} konstant gehalten und eine Variation der ebenfalls auf b normierten vertikalen Strahlposition

\bar{y}/b in einem Bereich von 0 bis 0.25 durchgeführt. Die für das Plotten der Bilder verwendeten transversalen Strahldimensionen wurden ebenfalls auf b normiert und betragen $\sigma_x/b = 0.15$ und $\sigma_y/b = 0.075$, was einem normierten quadrupolaren Moment $(\sigma_x^2 - \sigma_y^2)/b^2$ in Höhe von 1.6875×10^{-2} entspricht. In diesen analytischen Berechnungen wurde der Elektrodenwinkel $\alpha = 45^\circ$ verwendet.

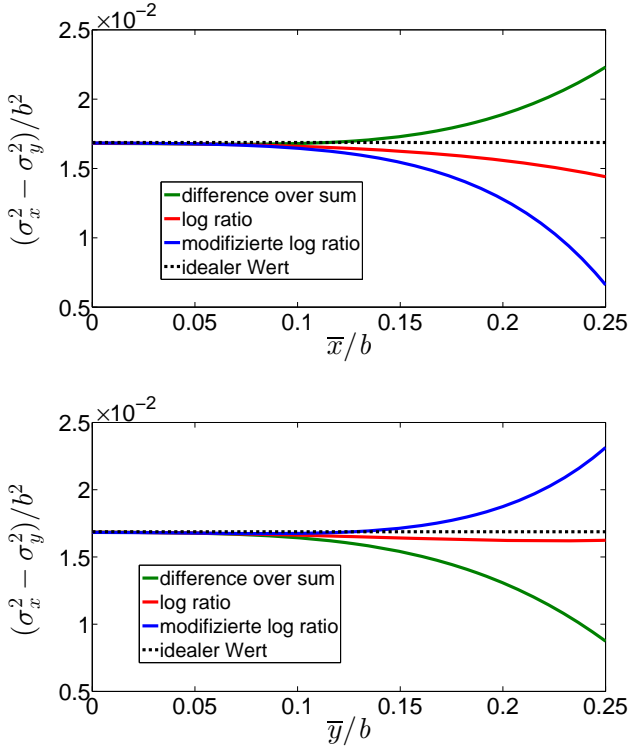


Abbildung 5.2.: Normiertes quadrupolares Moment $(\sigma_x^2 - \sigma_y^2)/b^2$ als Funktion der Strahlposition (\bar{x}, \bar{y}) ; $\sigma_x/b = 0.15$, $\sigma_y/b = 0.075$, $c_x = c_y = 0.1885$; oben: $\bar{y}/b = 0.05$, unten: $\bar{x}/b = 0.05$.

Anhand dieser beiden Bilder ist deutlich erkennbar, dass im Bereich der Strahlposition \bar{x} (oberes Bild) bzw. \bar{y} (unteres Bild) von 0 bis ungefähr 0.1 b das quadrupolare Moment für alle drei Methoden gleich dem zu bestimmenden Wert (idealen Wert) ist und demzufolge nicht von \bar{x} und \bar{y} abhängt. Dies lässt sich dadurch erklären,

dass im erwähnten Bereich von \bar{x} bzw. \bar{y} der Anteil des sextupolaren Terms im dipolaren Signal sowohl in horizontaler als auch in vertikaler Richtung so klein ist, dass er vernachlässigt werden kann. Demzufolge kann das dipolare Signal in diesem Bereich von \bar{x} , \bar{y} zwischen 0 und $0.1b$ als linear zur Strahlposition angesehen werden, wie man in der untenstehenden Abbildung sehen kann.

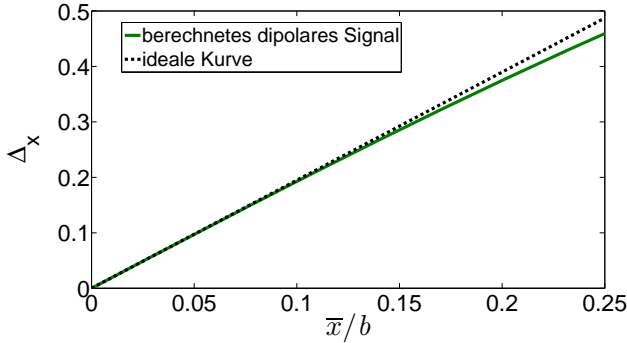
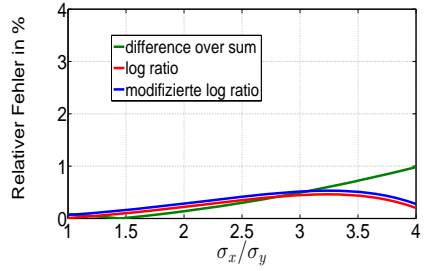
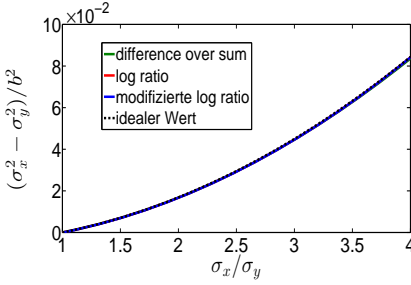


Abbildung 5.3.: Horizontales dipolares Signal Δ_x , berechnet mit der *difference over sum*-Methode, als Funktion von \bar{x}/b ; $\sigma_x/b = 0.15$, $\sigma_y/b = 0.075$; $\bar{y}/b = 0.05$.

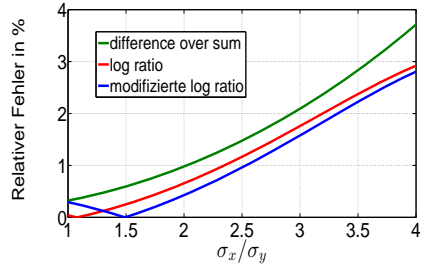
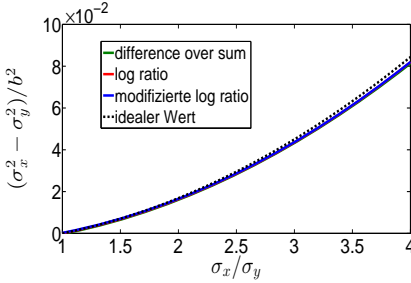
Das dipolare Signal in Abb. 5.3 wurde mithilfe von Gl. (5.5) berechnet.

Darüber hinaus stellt man in Abb. 5.2 fest, dass im Bereich der vertikalen Strahlposition \bar{y} bis ungefähr $0.15b$ die in dieser Arbeit entwickelte Methode, nämlich die *modifizierte log ratio*-Methode, die mit der möglichst geringeren Abhängigkeit von der Strahlposition ist (siehe das untere Bild in Abb. 5.2). Weiterhin sieht man, dass ab einem bestimmten Wert der Strahlposition das quadrupolare Moment des Strahls stark von seinem idealen Wert abweicht; der Grund dafür liegt darin, dass in den Gleichungen (5.8), (5.22) und (5.31) nur der quadratische Term der Strahlposition (\bar{x}^2, \bar{y}^2) von dem quadrupolaren Signal abgezogen wurde. Der in dieser Arbeit durch $O(1/b^4)$ gekennzeichnete vierte Ordnungsterm wurde nicht eliminiert und ist die Ursache für die vorhin erwähnte starke Abweichung.

In der Abbildung 5.2 wurde das quadrupolare Signal Ξ bzw. das quadrupolare Moment für eine feste transversale Strahldimension ($\sigma_x/b = 0.15$, $\sigma_y/b = 0.075$) in einem variablen Bereich der Strahlposition bestimmt. Im Folgenden wird nun $(\sigma_x^2 - \sigma_y^2)/b^2$ in einem variablen Bereich der Strahldimension berechnet, während \bar{x} und \bar{y} festgehalten werden.



(a) $\bar{x}/b = 0.08, \bar{y}/b = 0.05$



(b) $\bar{x}/b = 0.1, \bar{y}/b = 0.125$

Abbildung 5.4.: Links: berechnete Werte von $(\sigma_x^2 - \sigma_y^2)/b^2$ als Funktion von σ_x/σ_y , rechts: relative Abweichungen der berechneten $(\sigma_x^2 - \sigma_y^2)/b^2$ -Werte vom idealen Wert; $\sigma_y/b = 0.075$.

Für die Berechnung von $\sigma_x^2 - \sigma_y^2$ in der obigen Abbildung wurde die Strahlablage in den oberen und unteren Bildern so gewählt, dass sie sich zunächst in einem Bereich befindet, wo das quadrupolare Moment von der Strahlposition unabhängig ist (siehe Abb. 5.2), und dann in einem Bereich, in dem das Quadrupolmoment von der Strahlposition abhängt, um zu sehen, ob sich die Ergebnisse in der Abb. 5.2 auch in einem variablen Bereich der Strahldimension bestätigen lassen.

Im linken oberen Bild der Abb. 5.4 steht die berechnete Strahlelliptizität als Funktion von σ_x/σ_y , wobei σ_y 7.5% des Pick-up-Radius b beträgt. Die normierte horizontale Ablage \bar{x}/b des Strahls beträgt dabei 0.08, während die vertikale Strahlablage \bar{y} den Wert $0.05b$ hat. Da die Kurven im linken oberen Bild zu nah beieinander

liegen, so dass der Unterschied zwischen ihnen unauffällig ist, wurde im rechten oberen Bild zusätzlich die relative Abweichung der berechneten quadrupolaren Momente vom wahren Wert von $(\sigma_x^2 - \sigma_y^2)/b^2$ gezeigt. Diese relative Abweichung bezieht sich hier auf die absolute Abweichung geteilt durch den maximalen Wert der in Abb. 5.4 durch die schwarze gestrichelte Linie gekennzeichneten idealen Kurve. Anhand des Bildes der relativen Abweichung sieht man, dass der maximale relative Fehler in Bezug auf den idealen Wert bei allen drei Methoden unter 1% liegt. Mit anderen Worten, für den verwendeten Bereich von σ_x/σ_y zwischen 1 und 4 liefern alle drei Methoden ein von der Strahlablage unabhängiges quadrupolares Moment. Das heißt, dass die für das Berechnen des zweiten Moments des Strahls benutzten transversalen Strahlbreiten (σ_x/σ_y) den vierten Ordnungsterm des entsprechenden quadrupolaren Signals nicht so beeinflussen, denn das berechnete $(\sigma_x^2 - \sigma_y^2)/b^2$ im ganzen Bereich von σ_x/σ_y in den oberen Bildern der Abb. 5.4 ist gleich dem zweiten Moment (für $\bar{x}/b = 0.08$) im oberen Bild der Abb. 5.2, welches aber nur für eine Strahldimension, nämlich $\sigma_x/\sigma_y = 2$, berechnet wurde.

Das linke untere Bild in Abb. 5.4 zeigt wie im vorherigen Fall (oberes Bild derselben Abbildung) das berechnete Quadrupolmoment als Funktion des Verhältnisses von σ_x zu σ_y , dessen relative Abweichung vom idealen Wert im rechten unteren Bild dargestellt ist. Die Ablage des Strahls in der transversalen Ebene beträgt dabei ($\bar{x}/b = 0.1$, $\bar{y}/b = 0.125$). Auf dem rechten unteren Bild ist deutlich zu erkennen, dass der relative Fehler für die gewählte Strahlposition größer ist als der im oberen Bild. Dies lässt sich mithilfe des unteren Diagramms der Abb. 5.2 erklären; an der Stelle $\bar{y}/b = 0.125$ in diesem Diagramm sind alle Verfahren leicht empfindlich in Bezug auf die Strahlablage. Weiterhin stellt man fest, dass die *modifizierte log ratio*-Methode fast im ganzen Bereich der verwendeten Strahlbreite den niedrigeren relativen Fehler aufweist wie im unteren Bild der Abb. 5.2 an der Stelle $\bar{y}/b = 0.125$.

5.2.3 Optimierung des Verfahrens

Wie der Name schon verrät, geht es in diesem Abschnitt darum, das in dieser Arbeit entwickelte Verfahren, nämlich die *modifizierte log ratio*-Methode, zu optimieren. Dies kann durch eine Anpassung der Gewichtungsfaktoren c_x und c_y geschehen. Zunächst betrachten wir nochmals das quadrupolare Signal, berechnet mit der *modifizierte log ratio*:

$$\Xi_{mod} = \frac{160}{\ln(10)} \frac{\sin(\alpha)}{\alpha} \left[\frac{\sigma_x^2 - \sigma_y^2}{b^2} + \underbrace{\left(1 - (1 + 2 c_x)^2 \frac{\tan(\alpha/2)}{\alpha} \right)}_{m_x} \frac{\bar{x}^2}{b^2} - \underbrace{\left(1 - (1 + 2 c_y)^2 \frac{\tan(\alpha/2)}{\alpha} \right)}_{m_y} \frac{\bar{y}^2}{b^2} \right] + O\left(\frac{1}{b^4}\right). \quad (5.32)$$

Mit Gl. (5.32) bzw. anhand der Abb. 5.2, sieht man, dass je größer die Strahlablage wird, desto wichtiger der vierte Ordnungsterm $O(1/b^4)$ wird und dementsprechend nicht mehr vernachlässigbar ist, wie man in der nachstehenden Abbildung sehen kann, in der der vierte Ordnungsterm des im oberen Diagramm der Abb. 5.2 dargestellten quadrupolaren Moments (*modifizierte log ratio*) gezeigt wird.

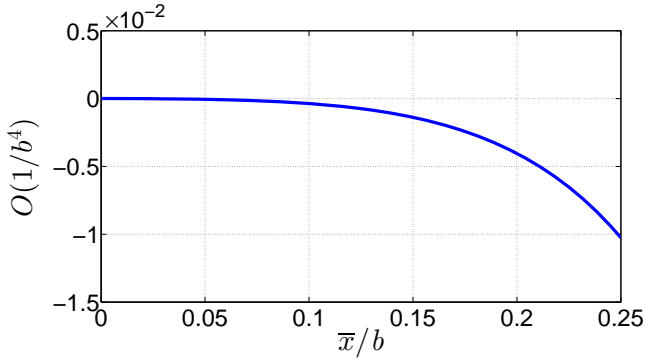


Abbildung 5.5.: Vierter Ordnungsterm des im oberen Diagramm der Abb. 5.2 dargestellten quadrupolaren Moments $(\sigma_x^2 - \sigma_y^2)/b^2$ als Funktion von \bar{x}/b ; $\sigma_x/\sigma_y = 2$, $\sigma_y/b = 0.075$, $\bar{y}/b = 0.05$, $c_x = c_y = 0.1885$.

$c_x = c_y = 0.1885$ wurde mit Gl. (5.30) bestimmt, so dass m_x und m_y in der Gleichung (5.32) verschwinden oder genauer gesagt gleich Null werden.

Schaut man sich nun die ganze Berechnung des quadrupolaren Signals Ξ_{mod} an, welche mit Gl. (5.27) beginnt, stellt man fest, dass der vierte Ordnungsterm sowohl

von der Strahlablage und Strahldimension als auch von den Verstärkungsfaktoren c_x und c_y abhängt. Da diese Faktoren c_x und c_y auch im vierten Ordnungsterm stecken, werden sie bei der Optimierung der Methode so gewählt, dass sie nicht nur den quadratischen Term der Strahlablage (\bar{x}^2, \bar{y}^2), wie das bis jetzt der Fall war, sondern gleichzeitig auch den vierten Ordnungsterm eliminieren. Dies führt dazu, dass c_x und c_y nun von der Strahlposition abhängt. Infolgedessen wird Gl. (5.32) wie folgt umgeschrieben:

$$\Xi_{mod} = \frac{160}{\ln(10)} \frac{\sin(\alpha)}{\alpha} \left[\frac{\sigma_x^2 - \sigma_y^2}{b^2} + \underbrace{m_x \frac{\bar{x}^2}{b^2} - m_y \frac{\bar{y}^2}{b^2} + O\left(\frac{1}{b^4}, c_x, c_y\right)}_P \right]. \quad (5.33)$$

Aus Gl. (5.33) lassen sich die Gewichtungsfaktoren als Nullstellen der Funktion P wie folgt bestimmen:

$$P = 0 \implies \sigma_x^2 - \sigma_y^2 = \frac{\Xi_{mod}}{S_{log}}. \quad (5.34)$$

Für die Optimierung werden sowohl eine Strahldimension als auch ein Bereich von \bar{x}/b und \bar{y}/b definiert werden, in dem das Berechnen des Quadrupolmoments optimiert werden soll. Es wird bei der Optimierung angenommen, dass die Strahlablage in beiden transversalen Ebenen den Wert zwischen 0 und 15% des Pick-up-Radius hat, d.h. $0 \leq \bar{x}/b \leq 0.15$ und $0 \leq \bar{y}/b \leq 0.15$. Die Strahlbreiten werden dabei die Werte $\sigma_x/b = 0.15$ und $\sigma_y/b = 0.075$ besitzen. Da im unteren Bild der Abb. 5.2 die *modifizierte log ratio-Methode* im \bar{y}/b -Bereich von 0 bis ungefähr 0.15 ein von der Strahlposition unabhängiges Quadrupolmoment liefert, wurde demzufolge nur im \bar{x} -Bereich eine Optimierung durchgeführt. Betrachtet man nun das obere Diagramm (blaue Kurve) der Abb. 5.2, ist deutlich zu erkennen, dass die berechnete Strahlelliptizität für den Bereich von \bar{x}/b zwischen 0 und ungefähr 0.1 konstant und im Bereich von 0.1 bis 0.15 variant ist. Letzteres wird hier der zu optimierende Bereich. In der folgenden Abbildung ist eine der Nullstellen c_x der in Gl. (5.33) definierten Funktion P für 21 äquidistante Werte von \bar{x}/b zwischen 0.1 und 0.15 dargestellt.

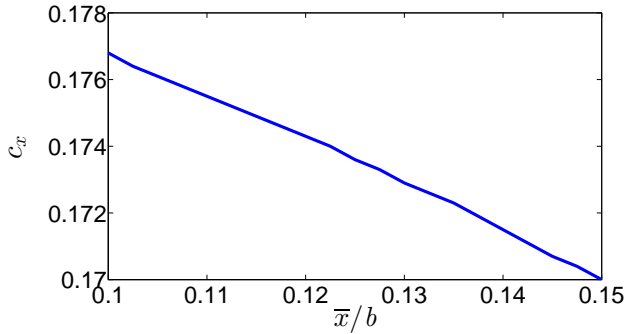
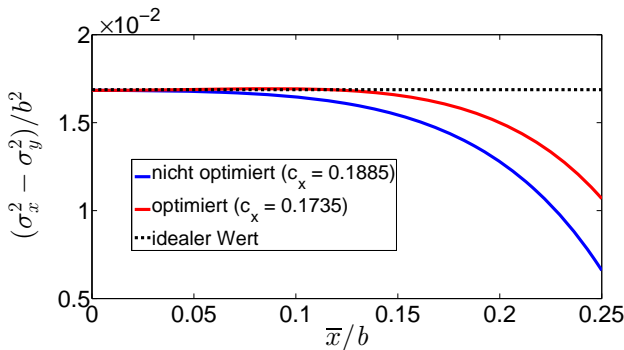


Abbildung 5.6.: Gewichtungsfaktor c_x (Nullstellen der Funktion P in Gl. (5.33)) als Funktion von \bar{x}/b ; $c_y = 0.1885$, $\sigma_x/\sigma_y = 2$, $\sigma_y/b = 0.075$, $\bar{y} = 0$.

P erhält man, nachdem das quadrupolare Signal gemäß Gl. (5.27) bestimmt und davon der Anteil $S_{log} \cdot (\sigma_x^2 - \sigma_y^2)$ abgezogen wurde.

Für die Optimierung des Verfahrens wird der neue c_x nun als der arithmetische Mittelwert aller in Abb. 5.6 veranschaulichten Gewichtungsfaktoren gewählt und beträgt 0.1735. Zur Berechnung des optimierten Faktors c_x wurde als Beispiel das arithmetische Mittel verwendet. Dennoch können je nach Optimierungswünschen auch andere Fitting-Mittel benutzt werden, die zu besseren Ergebnissen führen können. In folgender Abbildung steht das mit der *modifizierte log ratio*-Methode berechnete normierte Quadrupolmoment für einmal einen nicht und einmal einen optimierten Verstärkungsfaktor c_x als Funktion der Strahlposition.



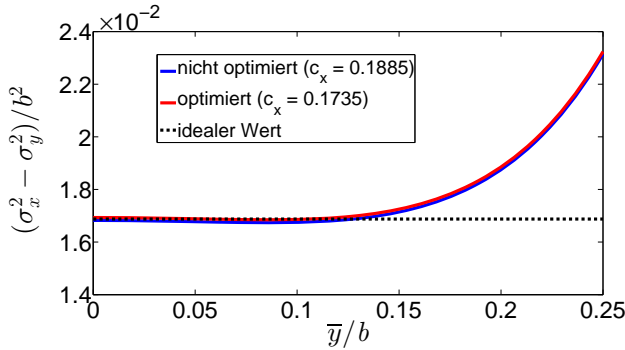
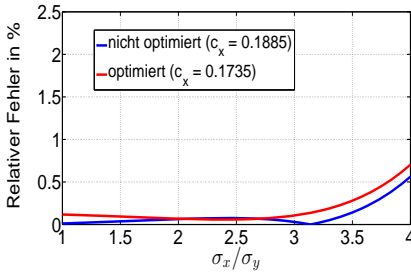


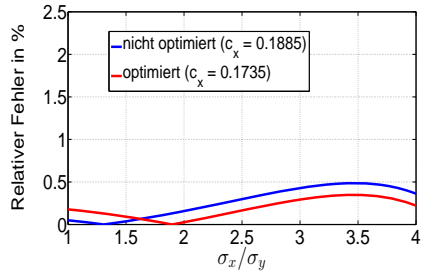
Abbildung 5.7.: Normiertes quadrupolares Moment $(\sigma_x^2 - \sigma_y^2)/b^2$, erhalten mit der modifizierte log ratio-Methode, als Funktion der Strahlposition; $\sigma_x/\sigma_y = 2$, $\sigma_y/b = 0.075$, $c_y = 0.1885$; oben: $\bar{y}/b = 0.05$, unten: $\bar{x}/b = 0.05$.

Im ersten Diagramm der obenstehenden Abbildung sieht man ganz deutlich, dass die optimierte Kurve für die verwendete Strahldimension ($\sigma_x/\sigma_y = 2$, $\sigma_y/b = 0.075$) im optimierten Bereich $0.1 \leq \bar{x}/b \leq 0.15$ und darüber hinaus erwartungsgemäß die niedrigere Abhängigkeit von der Strahlablage im Vergleich zur nicht optimierten Kurve aufweist. Darüber hinaus erkennt man, dass auch im Bereich von \bar{x} , der um etwa 10% kleiner als der Pickup Radius b ist, die optimierte Kurve die bessere ist. Das zweite Bild zeigt wie erwartet ein fast unverändertes Quadrupolmoment als Funktion der vertikalen Strahlablage \bar{y} für die beiden Kurven. Das liegt daran, dass in y -Richtung keine Optimierung durchgeführt wurde und der für das Plotten der Kurven verwendete \bar{x} -Wert schon im Bereich, in dem $(\sigma_x^2 - \sigma_y^2)/b^2$ nicht von \bar{x} abhängt, liegt.

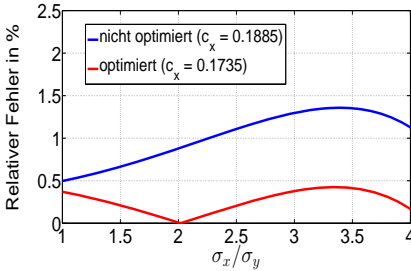
Die Optimierung des modifizierte log ratio-Verfahrens, welche durch die rote Kurve in Abb. 5.7 gekennzeichnet ist, wurde nur für eine feste Strahldimension, nämlich ($\sigma_x/b = 0.15$, $\sigma_y/b = 0.075$), durchgeführt. Dementsprechend kann eine allgemeine Aussage über den Vergleich zwischen den nicht und den optimierten Fällen erst getroffen werden, nachdem die Berechnung des quadrupolaren Moments mit dem optimierten Faktor $c_x = 0.1735$ auch für verschiedene Werte der Strahldimension durchgeführt wurde. Da die Kurven des Quadrupolmoments als Funktion der Strahlbreite so nah beieinander liegen, dass der Unterschied zwischen den Kurven nicht übersichtlich ist, wie das in Abb. 5.4 der Fall ist, wurden in der folgenden Abbildung stattdessen nur deren relative Abweichungen vom idealen Wert gezeigt. Dies wurde analog zu der relativen Abweichung berechnet, welche in Abb. 5.4 dargestellt ist.



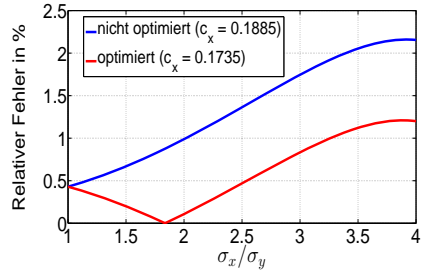
(a) $\bar{x}/b = 0.05, \bar{y} = 0$



(b) $\bar{x}/b = 0.05, \bar{y}/b = 0.075$



(c) $\bar{x}/b = 0.125, \bar{y} = 0$

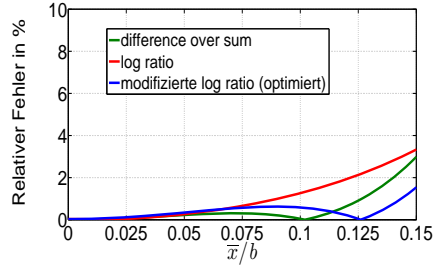
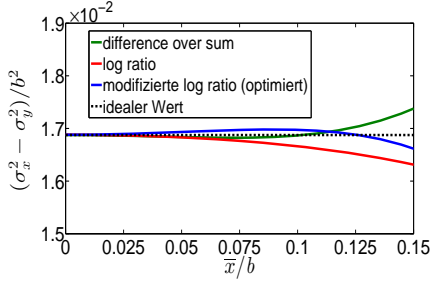


(d) $\bar{x}/b = 0.125, \bar{y}/b = 0.075$

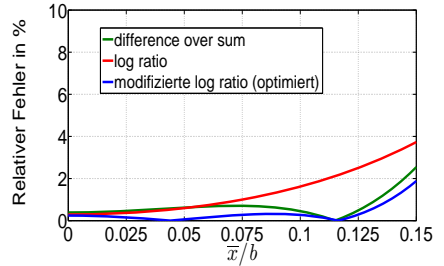
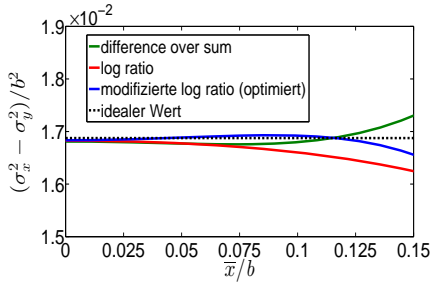
Abbildung 5.8.: Absolutwert der relativen Abweichung des berechneten quadrupolaren Moments vom idealen Wert in Prozent (%) angegeben; $\sigma_y/b = 0.075$, $c_y = 0.1885$.

Im Diagramm (a) der Abbildung 5.8 sieht man einen sehr leichten Vorteil der Kurve mit dem nicht optimierten Faktor. Dies lässt sich dadurch erklären, dass für die verwendete Strahlblage ($\bar{x}/b = 0.05, \bar{y} = 0$) der vierte Ordnungsterm zu gering und somit vernachlässigbar ist, was in diesem Fall dazu führt, dass nur der quadratische Term von \bar{x} vorhanden ist, und dieser kann gemäß Gln. (5.29) und (5.30) mit dem nicht optimierten Faktor besser eliminiert werden. In den Bildern (c) und (d), ebenfalls in Abb. 5.8, stellt man fest, dass die rote Kurve im ganzen Bereich der benutzten Strahlbreiten ein deutlich besseres Ergebnis liefert. Der Grund dafür liegt darin, dass die verwendete Strahlposition im Bereich der Optimierung liegt. Zusammenfassend kann man anhand der Abbildungen 5.7 und 5.8 sagen, dass der Gewichtungsfaktor $c_x = 0.1735$ ein deutlich besseres Ergebnis liefert, und dieser wird somit im Rest der Arbeit als der horizontale Verstärkungsfaktor der *mo-*

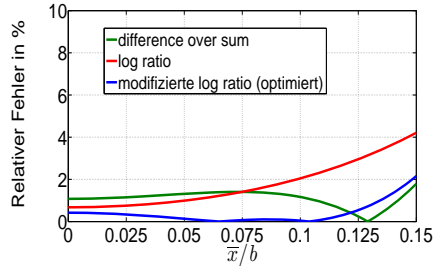
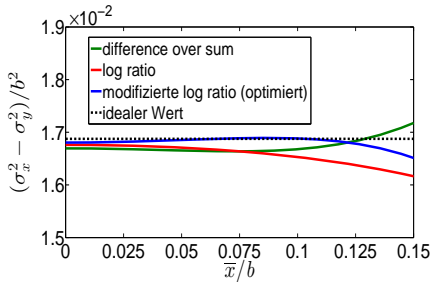
difizierte log ratio-Methode verwendet. Im Folgenden werden nun die optimierte modifizierte log ratio-Methode und die üblichen Methoden miteinander verglichen.



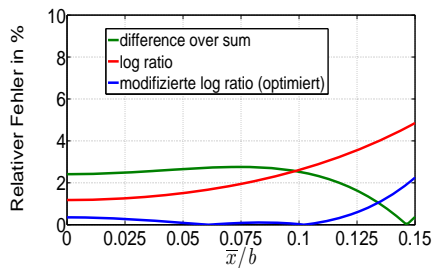
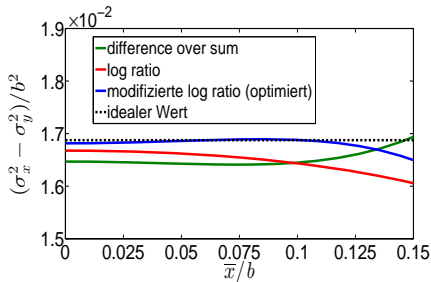
(a) $\bar{y} = 0$



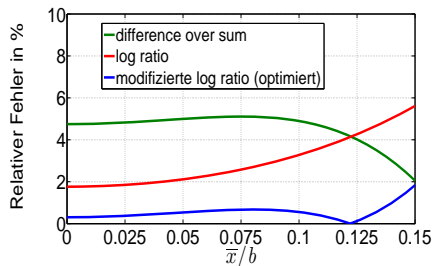
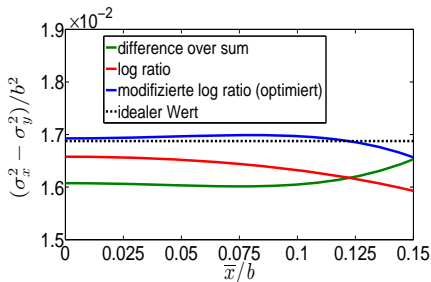
(b) $\bar{y}/b = 0.05$



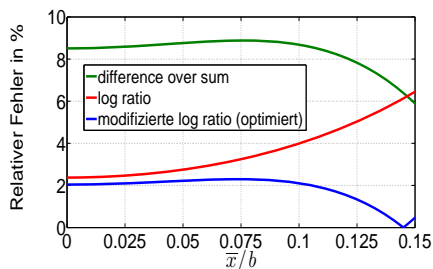
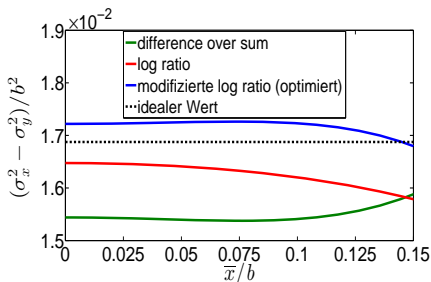
(c) $\bar{y}/b = 0.075$



(d) $\bar{y}/b = 0.1$



(e) $\bar{y}/b = 0.125$



(f) $\bar{y}/b = 0.15$

Abbildung 5.9.: Links: $(\sigma_x^2 - \sigma_y^2)/b^2$ als Funktion von \bar{x}/b , rechts: Absolutwert der relativen Abweichung der berechneten $(\sigma_x^2 - \sigma_y^2)/b^2$ -Werte vom idealen Wert in Prozent (%) angegeben; $\sigma_x/b = 0.15$, $\sigma_y/b = 0.075$, $c_x = 0.1735$, $c_y = 0.1885$.

Alle Bilder in Abb. 5.9 zeigen, dass im Bereich von \bar{x}/b zwischen 0 und 0.15 das *modifizierte log ratio*-Verfahren die Methode mit dem geringsten Anteil der Strahlposition ist. Anders ausgedrückt kann man sagen, dass für einen sich innerhalb des Quadranten begrenzt durch die Ebenen $x = 0$, $x = 0.15b$, $y = 0$ und $y = 0.15b$ befindenden Strahl das Quadrupolmoment, berechnet mit der *modifizierte log ratio*-Methode, weniger von der Strahlblage abhängt. Der Grund für die Große Abweichung bei den üblichen Methoden liegt in den dipolaren Signalen Δ_x und Δ_y , da diese (dipolare Signale) nicht nur von \bar{x} bzw. \bar{y} , sondern auch von den sextupolaren Termen z_{3x} bzw. z_{3y} , welche bei großen Werten der Strahlblage nicht mehr vernachlässigbar sind, abhängen (siehe Gln. (5.5) und (5.7) sowie die unten stehende Abbildung).

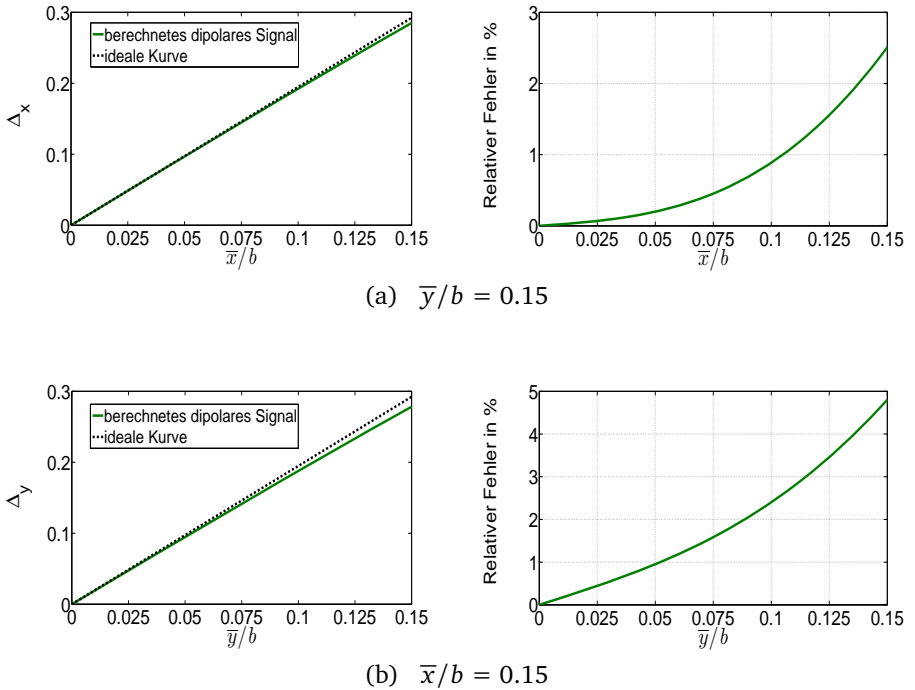
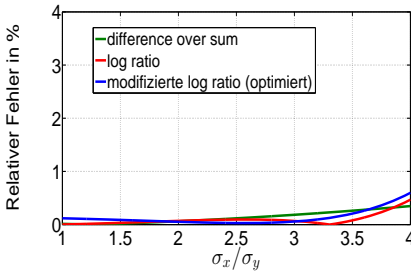


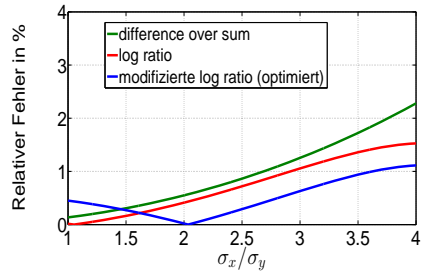
Abbildung 5.10.: Links: dipolare Signale, berechnet mit der *difference over sum*-Methode, als Funktion der Strahlblage; rechts: Absolutwert der relativen Abweichung der berechneten dipolaren Signale von der idealen Kurve; $\sigma_x/b = 0.15$, $\sigma_y/b = 0.075$.

Bei der *modifizierte log ratio*-Methode hingegen kann durch die Variation von c_x und c_y der Anteil des vierten Ordnungsterms beeinflusst werden, da dieser (vierter Ordnungsterm) auch von den Gewichtungsfaktoren abhängt. Ferner sieht man anhand Abb. 5.9, dass wenn die beiden Koordinaten der Strahlposition gleich sind ($\bar{x} = \bar{y}$), die traditionellen Methoden erwartungsgemäß dasselbe Ergebnis liefern.

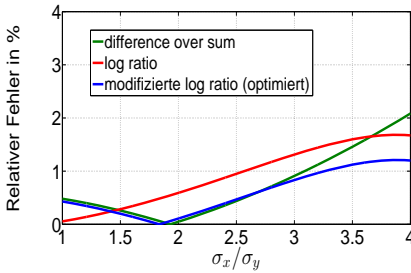
Wie bei der Abbildung 5.7 wurden die Berechnungen in Abb. 5.9 nur für eine konstante Strahldimension durchgeführt. Im Folgenden wird nun der Vergleich aller drei Methoden für verschiedene Werte von σ_x vorgenommen, während \bar{x} und \bar{y} konstant gehalten werden. Aus demselben Grund wie bei der Abbildung 5.7 werden hier nur die relativen Abweichungen des berechneten $(\sigma_x^2 - \sigma_y^2)/b^2$ vom idealen Wert gezeigt.



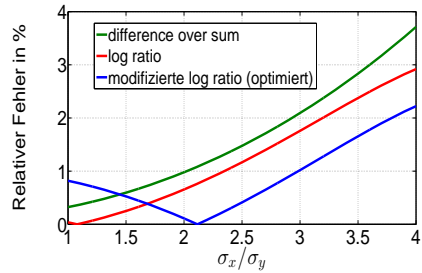
(a) $\bar{x}/b = 0.05, \bar{y}/b = 0.025$



(b) $\bar{x}/b = 0.08, \bar{y}/b = 0.1$



(c) $\bar{x}/b = 0.125, \bar{y}/b = 0.075$



(d) $\bar{x}/b = 0.1, \bar{y}/b = 0.125$

Abbildung 5.11.: Absolutwert der mit allen drei Methoden berechneten relativen Abweichung des quadrupolaren Moments vom idealen Wert als Funktion von σ_x/σ_y ; $\sigma_y/b = 0.075, c_x = 0.1735, c_y = 0.1885$.

Das Bild (a) in Abb. 5.11 zeigt aufgrund des relativ kleinen Wertes der Strahlablage erwartungsgemäß eine niedrigere relative Abweichung der berechneten quadrupolaren Momente vom idealen Wert. Alle drei Methoden liefern im ganzen Bereich der Strahlbreite fast dasselbe Ergebnis. Bei allen anderen Diagrammen stellt man fest, dass im Bereich der Strahldimension um den bei der Optimierung verwendeten Wert $\sigma_x/\sigma_y = 2$ und darüber hinaus die in dieser Arbeit entwickelte Methode das leicht bessere Ergebnis liefert.

In diesem Abschnitt wurden die Optimierungsergebnisse der *modifizierte log ratio*-Methode vorgestellt. Dennoch, wie schon ganz oben in diesem Abschnitt erwähnt, wurde die Bestimmung des quadrupolaren Moments nur für einen bestimmten frei wählbaren Bereich der Strahlablage, nämlich $0 \leq \bar{x}/b \leq 0.15$ und $0 \leq \bar{y}/b \leq 0.15$, berechnet. In diesem Bereich wurde festgestellt, dass die optimierte Version des *modifizierte log ratio*-Verfahrens die bessere Ergebnisse liefert in Bezug auf das Reduzieren des Anteils der Strahlposition im quadrupolaren Signal bzw. Moment. Hier ist es wichtig, zu beachten, dass eine Optimierung des in dieser Arbeit entwickelten Verfahrens nur im Bereich der horizontalen Strahlposition durchgeführt wurde. Eine Optimierung in beiden Richtungen würde jedoch dazu führen, dass die entwickelte Methode noch besser wird, wie das bei den Simulationen im Kapitel 6 zu sehen ist.

Die analytischen Ergebnisse bzw. Formeln in diesem Kapitel wurden anhand eines symmetrischen Pick-up-Designs mit den sogenannten Button-Elektroden (siehe Abb. 4.1) hergeleitet. Dennoch werden in der Praxis öfter auch andere symmetrische Pick-up-Anordnungen, wie die in der untenstehenden Abbildung, verwendet.

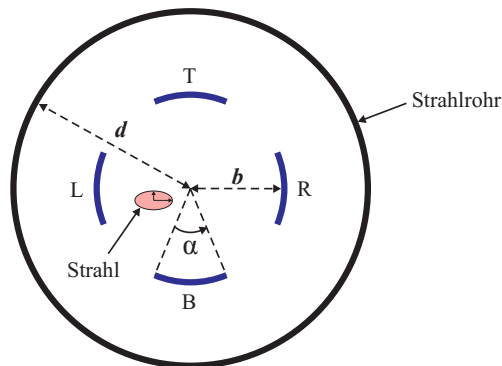


Abbildung 5.12.: Vorderansicht eines weiteren symmetrischen Pick-up-Designs; $b = 70$ mm, $d = 150$ mm, Elektrodenlänge $l = 210$ mm, $\alpha = 45^\circ$.

Der einzige Unterschied zwischen solchen Modellen und dem mit den Button-Elektroden liegt in der Sensitivität des Pick-up, was dazu führt, dass die im Abschnitt 5.2.3 analytisch erhaltenen Gewichtungsfaktoren c_x und c_y erneut berechnet werden müssen. Zur Bestimmung von c_x und c_y für die Abbildung 5.12 wird zunächst das quadrupolare Signal bezüglich der *modifizierte log ratio*-Methode, beschrieben durch Gl. (5.28), nochmal betrachtet:

$$\Xi_{mod} = \frac{80}{\ln(10)} \left[z_2 - \frac{(1 + 2 c_x)^2 z_{1x}^2 - (1 + 2 c_y)^2 z_{1y}^2}{4} \right] + O\left(\frac{1}{b^4}\right). \quad (5.35)$$

Das Einsetzen von z_2 , z_{1x} und z_{1y} als Funktion von $S_{\Delta/\Sigma}$ und $S_{\Delta_{x,y}}$ in die obige Gleichung ergibt

$$\begin{aligned} \Xi_{mod} = \frac{80}{\ln(10)} \cdot S_{\Delta/\Sigma} \cdot & \left[\left(\sigma_x^2 - \sigma_y^2 \right) + \underbrace{\left(1 - \frac{(1 + 2 c_x)^2}{4} \frac{S_{\Delta_x}^2}{S_{\Delta/\Sigma}} \right)}_{m_x} \bar{x}^2 \right. \\ & \left. - \underbrace{\left(1 - \frac{(1 + 2 c_y)^2}{4} \frac{S_{\Delta_y}^2}{S_{\Delta/\Sigma}} \right)}_{m_y} \bar{y}^2 \right] + O\left(\frac{1}{b^4}\right), \end{aligned} \quad (5.36)$$

wobei $S_{\Delta/\Sigma}$ und $S_{\Delta_{x,y}}$ jeweils für die quadrupolare und dipolare Sensitivitäten des Pick-up bezüglich der *difference over sum*-Methode stehen.

Aus Gl. (5.36) kann eine allgemeine Formel zur Bestimmung der Gewichtungsfaktoren wie folgt abgeleitet werden:

$$m_x = 0 \implies \boxed{c_x = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{S_{\Delta/\Sigma}}{S_{\Delta_x}^2}}}. \quad (5.37)$$

$$m_y = 0 \implies \boxed{c_y = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{S_{\Delta/\Sigma}}{S_{\Delta_y}^2}}}.$$

Anhand Gl. (5.37) sieht man ganz deutlich, dass c_x und c_y im Allgemeinen von den quadrupolaren und dipolaren Sensitivitäten abhängt. Eine Optimierung der

Gewichtungsfaktoren für die Abbildung 5.12 kann analog zu der im Abschnitt 5.2.3 durchgeführt werden, wenn die Werte von $S_{\Delta/\Sigma}$ und $S_{\Delta_{x,y}}$ bekannt sind. Diese Werte können numerisch bestimmt werden, wie man im zweiten Teil des nächsten Kapitels sehen wird.

6 Simulationen und Ergebnisse

In dieser Arbeit wurden drei verschiedene Pick-up-Designs, nämlich ein symmetrisches kreisförmiges Pick-up, der im SIS-18 der GSI installierte asymmetrische Strahlpositionsmonitor und die sogenannte Shoe-Box-Struktur ebenfalls von GSI numerisch mit den 3D-Feldsimulationsprogrammen CST EMS und CST PS [3] untersucht und die Simulationsergebnisse werden in diesem Kapitel vorgestellt. Eine Einführung in diese Feldsimulatoren wird Bestandteil des ersten Abschnitts dieses Kapitels sein, während im Abschnitt 6.2 die Simulationsergebnisse der oben erwähnten Pick-up-Modelle präsentiert werden. Da es bei dem in dieser Arbeit simulierten symmetrischen Pick-up nur darum geht, dessen Simulationsergebnisse mit den Ergebnissen der analytischen Untersuchungen zu vergleichen, wurde dieses Pick-up-Modell dementsprechend nur mit dem elektrostatischen Löser von CST EM Studio untersucht. Die asymmetrische Struktur hingegen ist, wie bereits oben erwähnt, ein im SIS-18 der GSI angebautes Pick-up und wurde daher mit allen drei Programmen simuliert. Da die mit dem PIC-Löser vom CST Particle Studio erhaltenen Ergebnisse ohne äußere Beschaltung untersucht wurden, widmet sich der letzte Abschnitt dieses Kapitels der Untersuchung des Frequenzverhaltens eines realen Verstärkers und dessen Einfluss auf die mit Particle Studio erhaltenen Simulationsergebnisse. In diesem Abschnitt werden die mit dem Netzwerksimulationsprogramm CST Design Studio erhaltenen Ergebnisse vorgestellt.

6.1 Einleitung zur 3D-Simulationssoftware CST

6.1.1 CST EM Studio

CST EM Studio ist ein Software-Paket für die elektromagnetische Untersuchung und den Entwurf von elektrostatischem, magnetostatischem, stationärem Strom und niederfrequenten Anordnungen. Die Software enthält fünf verschiedene Löser [3]:

- 1) Elektrostatischer Löser ,
- 2) Magnetostatischer Löser ,

-
- 3) Stationärer Strom Löser ,
 - 4) Niederfrequenter Frequenzbereich Löser ,
 - 5) Niederfrequenter Zeitbereich Löser .

Die meisten Löser unterstützen zwei unterschiedliche Diskretisierungsarten:

- die **tetraedrische Diskretisierung**, die durch eine Oberflächen-Diskretisierung eine explizite Darstellung der Geometrie und Material-Trennfläche liefert. Diese Geometrie-Auflösung wird während einer adaptiven Diskretisierungs-Verfeinerung (adaptive mesh) ständig verbessert.
- die **hexaedrische Diskretisierung**, bei der die Material-Trennfläche und Objekte nicht durch Oberflächenmeshzellen wie bei der tetraedrischen Diskretisierungsart, sondern durch Volumenmeshzellen dargestellt sind. Demzufolge ist dieser Algorithmus sehr robust und Diskretisierungen können sogar für sehr komplexe CAD-Geometrien erzeugt werden.

Der elektrostatische Löser kann auf elektrostatische und quasi-elektrostatische Probleme angewandt werden wie zum Beispiel Hochspannungsgeräte, Schaltanlagen, MEMS, Kondensatoren bzw. kapazitive Anordnungen [42] und wurde daher in dieser Arbeit verwendet. Eine adaptive Mesh-Verfeinerung ist für die durch diesen Löser unterstützten beiden Diskretisierungsarten vorhanden. Es gibt verschiedene Anregungsarten, unter anderem *fixed*- und *floating*-Potentialen sowie Ladungen auf metallische und dielektrische Objekte.

6.1.2 CST Particle Studio

CST PS (Particle Studio) ist ein Software-Paket für die elektromagnetische Untersuchung und den Entwurf von elektromagnetischen Komponenten zur Beschleunigung und Ablenkung von elektrisch geladenen Teilchenstrahlen. Diese Software bietet drei verschiedene Löser zur Berechnung elektromagnetischer Felder und Untersuchung der Teilchendynamik [3]:

- 1) Zeitbereich Wakefield Simulator ,
- 2) Zeitbereich PIC (Particle-In-Cell)-Löser ,
- 3) Particle Tracking Löser .

Der im Zeitbereich arbeitende PIC-Löser ist der aufwendigste der drei oben erwähnten PS Löser. Die gegenseitige Kopplung zwischen den Teilchen und elektromagnetischen Feldern wird in diesem selbstkonsistenten Teilchen-in-Zelle-Code berücksichtigt. Mit mehreren Emissionsmodellen wie DC, Reihe von Gaußstrahlen, Feldemission und benutzerdefinierten Emissionen kann praktisch jede Partikelquelle modelliert werden. Es gibt beim PIC-Löser viele Anregungsarten, unter anderem *Teilchen auf einem PEC (Perfect Electric Conductor)-Objekt* sowie *Teilchen auf einer beliebigen Fläche*. Letzteres wurde hier bei den Simulationen verwendet.

6.2 Simulationen ohne äußere Beschaltung

In diesem Abschnitt werden alle Modelle ideal, d.h. ohne äußere Beschaltung (wie z.B. Verstärker, Filter, usw.) untersucht.

6.2.1 Symmetrisches kreisförmiges Pick-up

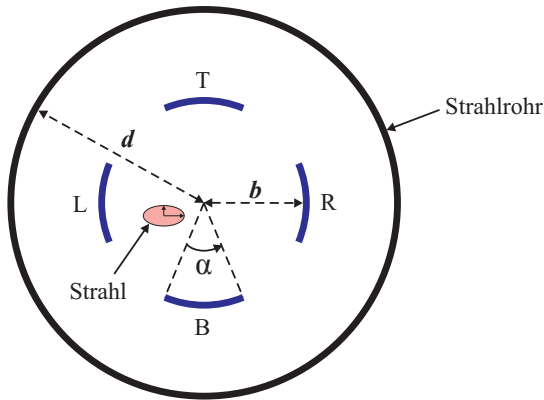


Abbildung 6.1.: Vorderansicht des simulierten symmetrischen Pick-up-Designs; $b = 70 \text{ mm}$, $d = 150 \text{ mm}$, Elektrodenlänge $l = 210 \text{ mm}$, $\alpha = 45^\circ$.

Das in Abb. 6.1 dargestellte Modell wurde mithilfe des elektrostatischen Löses von CST EMS simuliert. Die Ergebnisse der durchgeführten Simulationen werden dann mit denen aus den analytischen Untersuchungen verglichen. Für die Simulation wurde der Strahl durch einen elektrisch leitenden elliptischen Zylinder mit den

Radien (σ_x, σ_y) modelliert (siehe Abb. 6.2) und die Parameter des analytischen Modells, wie die anguläre Elektrodenbreite $\alpha = 45^\circ$, wurden hier übernommen. Was die Anregung angeht, kann auf die Oberfläche des Zylinders entweder ein festes Potential oder eine Ladungsverteilung mit einer festen Ladung angelegt werden, was bei der Berechnung des normierten quadrupolaren Signals gemäß Gleichungen (5.1) und (5.15) zu demselben Ergebnis führt. Hier wurde für die Anregung ein Potential von 1 V und auf alle vier Elektroden ein *Floating* Potential definiert. Das Strahlrohr wurde dabei als Masse gewählt und die Simulation wurde mit der adaptiven Meshverfeinerung der klassischen tetraedrischen Diskretisierung durchgeführt. Die unten stehende Abbildung zeigt das Pick-up-Design aus CST EMS. Das rot gekennzeichnete Objekt in der Abbildung ist der modellierte Strahl.

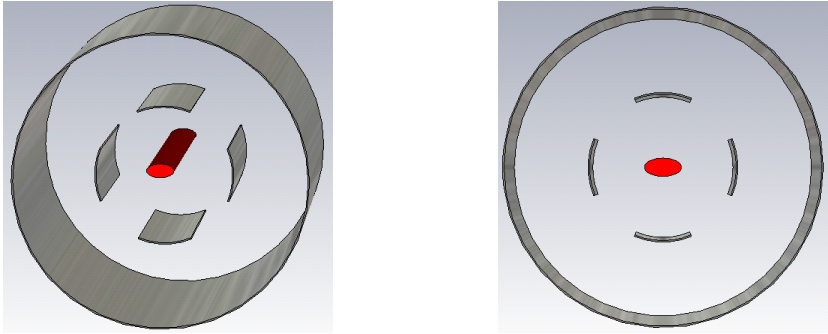
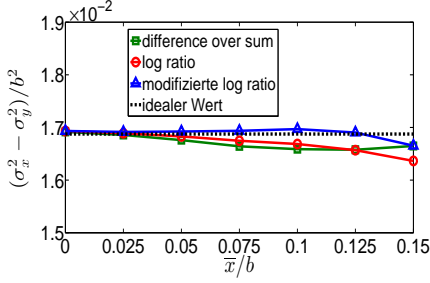


Abbildung 6.2.: Pick-up-Design aus CST EMS; *links:* perspektivische Ansicht, *rechts:* Vorderansicht.

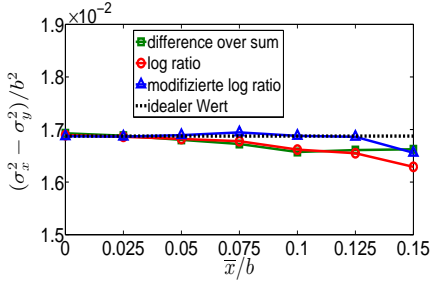
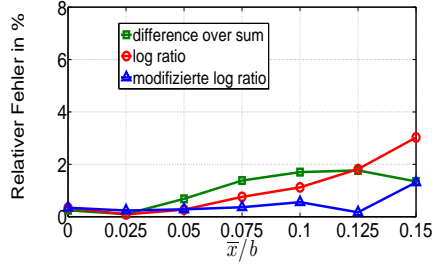
Nachdem die Sensitivitäten der quadrupolaren bzw. dipolaren Signale bezüglich der *difference over sum*-Methode numerisch bestimmt (siehe Anhang A.1) und in die Gl. (5.37) eingesetzt wurden, ergeben sich $c_x = c_y = 0.213$. Dieser Wert ist erforderlich, um zu wissen, in welchem Bereich von c_x und c_y ein Parameter Sweep bei der Simulation vorgenommen werden soll. Wie bei den analytischen Untersuchungen auf der Seite 70 wurde hier eine Optimierung von c_x und c_y im Bereich der horizontalen bzw. vertikalen Strahlposition zwischen $0.1b$ und $0.15b$ durchgeführt. Aus dieser Optimierung ergaben sich $c_x = 0.2017$ und $c_y = 0.2066$. Die detaillierte Vorgehensweise der Optimierung von c_x ist im Anhang A.2 zu finden.

Die folgende Abbildung zeigt das mit allen drei Methoden berechnete quadrupolare Moment als Funktion der Strahlposition. Dieses normierte Moment $(\sigma_x^2 - \sigma_y^2)/b^2$ wurde gemäß Gln. (5.8), (5.22) und (6.6) erhalten, nachdem die an den Elektroden induzierten Spannungen U_R , U_T , U_L und U_B numerisch mit CST EMS bestimmt

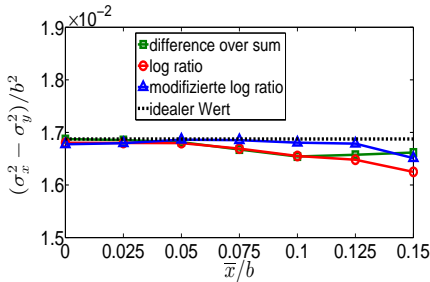
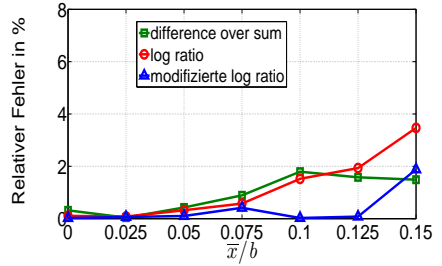
und in die entsprechenden Gleichungen zur Bestimmung des quadrupolaren Signals und der dipolaren Signale eingesetzt wurden.



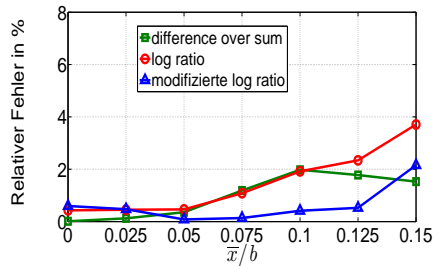
(a) $\bar{y} = 0$

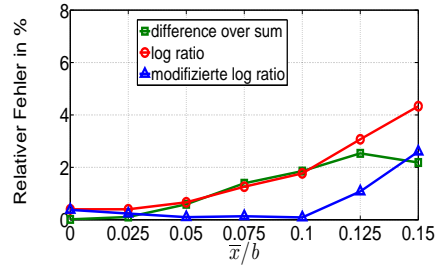
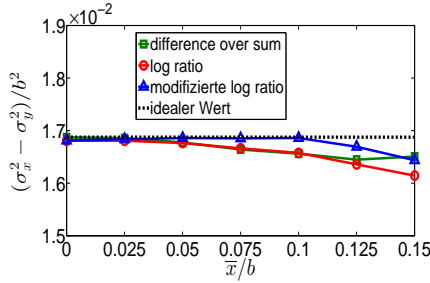


(b) $\bar{y}/b = 0.05$

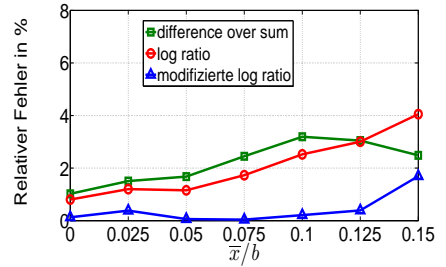
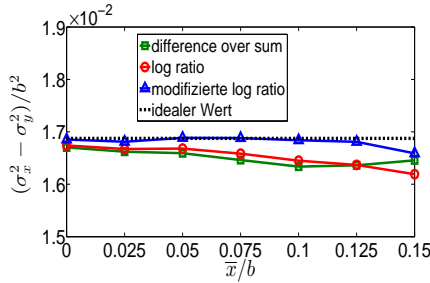


(c) $\bar{y}/b = 0.075$

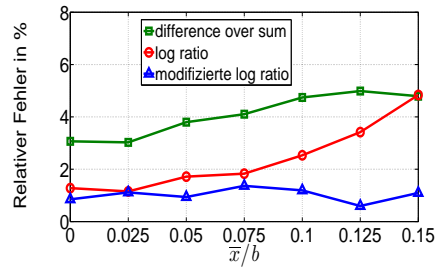
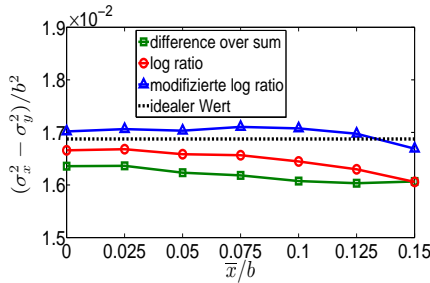




(d) $\bar{y}/b = 0.1$



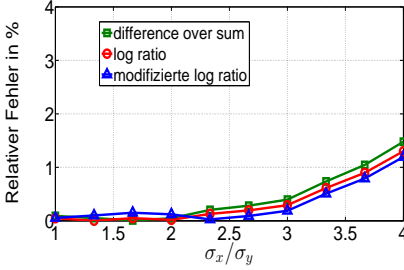
(e) $\bar{y}/b = 0.125$



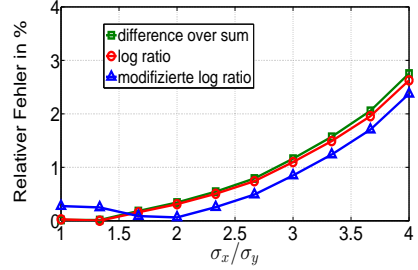
(f) $\bar{y}/b = 0.15$

Abbildung 6.3.: Links: $(\sigma_x^2 - \sigma_y^2)/b^2$ als Funktion von \bar{x}/b , rechts: Absolutwert der relativen Abweichung der berechneten $(\sigma_x^2 - \sigma_y^2)/b^2$ -Werte vom idealen Wert; $\sigma_x/b = 0.15$, $\sigma_y/b = 0.075$, $c_x = 0.2017$, $c_y = 0.2066$.

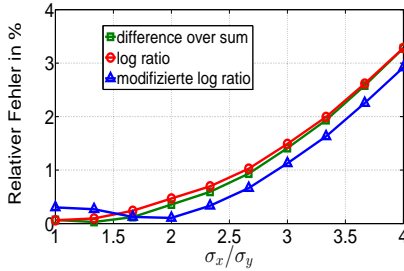
Der Absolutwert der relativen Abweichung des berechneten Quadrupolmoments vom idealen Wert ist in der folgenden Abbildung als Funktion von σ_x/σ_y veranschaulicht.



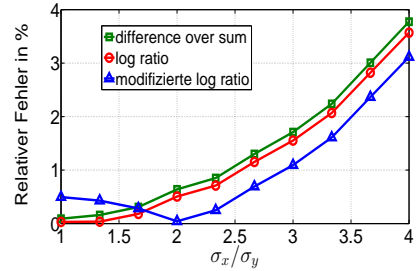
(a) $\bar{x}/b = 0.05, \bar{y}/b = 0.025$



(b) $\bar{x}/b = 0.08, \bar{y}/b = 0.1$



(c) $\bar{x}/b = 0.125, \bar{y}/b = 0.075$



(d) $\bar{x}/b = 0.1, \bar{y}/b = 0.125$

Abbildung 6.4.: Absolutwert der relativen Abweichung des quadrupolaren Moments vom idealen Wert, berechnet mit allen drei Methoden; $\sigma_y/b = 0.075$, $c_x = 0.2017$, $c_y = 0.2066$.

Vergleicht man alle Diagramme in den beiden oben liegenden Abbildungen mit denen in den Abbildungen 5.9 und 5.11, stellt man fest, dass eine sehr gute Übereinstimmung zwischen den analytischen und den numerischen Ergebnissen in Bezug auf die Form der Kurven vorliegt. Wie bei den analytischen Untersuchungen sieht man in Abb. 6.3, dass wenn die beiden Koordinaten der Strahlposition gleich sind ($\bar{x} = \bar{y}$), die traditionellen Methoden erwartungsgemäß dasselbe Ergebnis liefern.

6.2.2 Asymmetrisches Pick-up

Das in Abb. 6.5 dargestellte Pick-up-Design wurde hier mit dem elektrostatischen Löser simuliert, um die Eigenschaften der Struktur als quadrupolares Pick-up zu bestimmen, und dessen Frequenzverhalten wurde mit dem PIC-Löser untersucht.

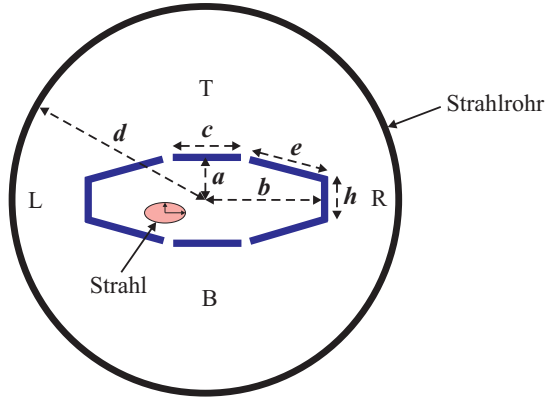


Abbildung 6.5.: Vorderansicht des simulierten asymmetrischen Pick-up-Designs; $a = 35.3 \text{ mm}$, $b = 100.3 \text{ mm}$, $c = 60 \text{ mm}$, $d = 150 \text{ mm}$, $e = 62.5 \text{ mm}$, $h = 32 \text{ mm}$, Elektrodenlänge $l = 210 \text{ mm}$, Strahlrohrlänge $l_s = 296 \text{ mm}$ [4].

R, T, L und B in der obigen Abbildung stehen für die rechte, obere, linke und untere Elektroden.

6.2.2.1 Bestimmung der Pick-up-Eigenschaften

Da für den typischen SIS-18-Betrieb die Strahllänge viel größer ist als die Elektrodenlänge l ($l = 210 \text{ mm}$), kann die Anordnung demzufolge auf ein 2D-Problem reduziert werden und deren Eigenschaften, unter anderem die Pick-up-Sensitivität, sowie die Gewichtungsfaktoren aus Gl. (5.30) können elektrostatisch mit dem elektrostatischen Löser von CST EM Studio bestimmt werden. Der entscheidende Vorteil dieses Löser gegenüber dem PIC-Löser von CST PS ist die wesentlich geringere Simulationszeit.

Der Strahl in Abb. 6.5 hat die transversalen Halbbreiten (σ_x, σ_y) und befindet sich in einer transversalen Position (\bar{x}, \bar{y}).

Zunächst wurde das Pick-up für verschiedene Werte der Strahlbreiten simuliert,

um zu sehen, ob das Pick-up überhaupt sensitiv zum Quadrupolmoment des Strahls ist. Für die Simulation wurde der Strahl wie bei dem symmetrischen Pick-up durch einen elektrisch leitenden elliptischen Zylinder mit den Radien (σ_x, σ_y) modelliert. Die Anregung erfolgte analog der im vorherigen Abschnitt. Die nachstehende Abbildung zeigt das quadrupolare Signal Ξ für einen in der Mitte des Strahlrohrs liegenden Strahl als Funktion der Strahlbreite. Für den SIS-18-Betrieb soll die transversale Strahldimension um bis 50% von der Breite ($\sigma_x = 15$ mm, $\sigma_y = 7.5$ mm) variiert werden.

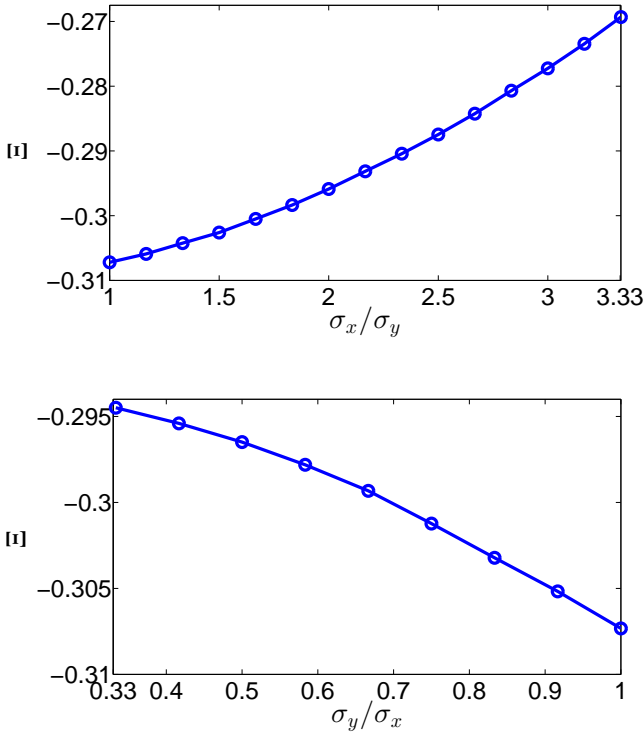


Abbildung 6.6.: Quadrupolares Signal Ξ für einen zentrierten Strahl als Funktion der Strahlbreite; *oben:* Ξ als Funktion von σ_x/σ_y , $\sigma_y/b = 0.075$; *unten:* Ξ als Funktion von σ_y/σ_x , $\sigma_x/b = 0.15$, $b = 100.3$ mm.

Das in Abb. 6.6 dargestellte quadrupolare Signal Ξ wurde mit der *difference over sum*-Methode

$$\Xi = \frac{(U_R + U_L) - (U_T + U_B)}{U_R + U_L + U_T + U_B} \quad (6.1)$$

erhalten, nachdem die an den Platten induzierten Spannungen U_R , U_L , U_T und U_B numerisch mit CST EMS bestimmt wurden.

Das quadrupolare Signal im oberen Diagramm der Abb. 6.6 wurde für einen Bereich der Strahlelliptizität so berechnet, dass die transversale horizontale Strahlbreite σ_x/b von 0.075 bis 0.25 variiert, während σ_y konstant festgehalten wurde. Im unteren Bild hingegen wurde die vertikale Strahlbreite σ_y/b von 0.05 bis 0.15 variiert, während $\sigma_x/b = 0.15$.

In den beiden Bildern in Abb. 6.6 kann man deutlich erkennen, dass Ξ von der Strahlbreite abhängt. Anders ausgedrückt ist das Pick-up sensitiv gegenüber dem quadrupolaren Signal, welches sich im Allgemeinen als Funktion des quadrupolaren Moments für den simulierten Bereich der Strahlbreite wie folgt darstellen lassen kann:

$$\Xi = S \cdot (\sigma_x^2 - \sigma_y^2) + \Xi_0, \quad (6.2)$$

wobei S die Sensitivität des Pick-up ist und Ξ_0 der Wert des quadrupolaren Signals für einen runden und zentrierten Strahl, welcher bei symmetrischen Anordnungen gleich Null ist. Da die untersuchte Struktur asymmetrisch ist, ergibt sich dementsprechend ein Ξ_0 ungleich Null, wie das im oberen Diagramm der Abb. 6.6 ($\Xi(\sigma_x = \sigma_y)$) zu sehen ist.

Mit der Methode der linearen Regression wurden anhand eines der Bilder in Abb. 6.6 die Sensitivität S und Ξ_0

$$S = 6.65 \times 10^{-5} \text{ (1/mm}^2\text{)}, \quad \Xi_0 = -0.3072 \quad (6.3)$$

mit einem Determinationskoeffizient $R^2 = 0.997$ bestimmt. Aufgrund dessen höherer Anzahl simulierter σ_x -Werte, wurde für die Bestimmung von S das obere Diagramm der Abbildung 6.6 bevorzugt. Da der Determinationskoeffizient R^2 bei ungefähr 1 liegt, kann man sagen, dass im Bereich der simulierten σ_x und σ_y das Pick-up bzw. das aus diesem Pick-up erhaltene quadrupolare Signal linear zu $\sigma_x^2 - \sigma_y^2$ ist.

Die Simulation des in Abb. 6.6 dargestellten quadrupolaren Signals wurde für einen zentrierten Strahl ($\bar{x} = \bar{y} = 0$) durchgeführt. Die folgende Abbildung zeigt nun das quadrupolare Signal für einen runden Strahl ($\sigma_x = \sigma_y = 7.5 \text{ mm}$) als Funktion der Strahlablage. Für den SIS-18-Betrieb sollen die Werte der Strahlablage (\bar{x}, \bar{y}) zwischen 0 und 10 mm variiert werden.

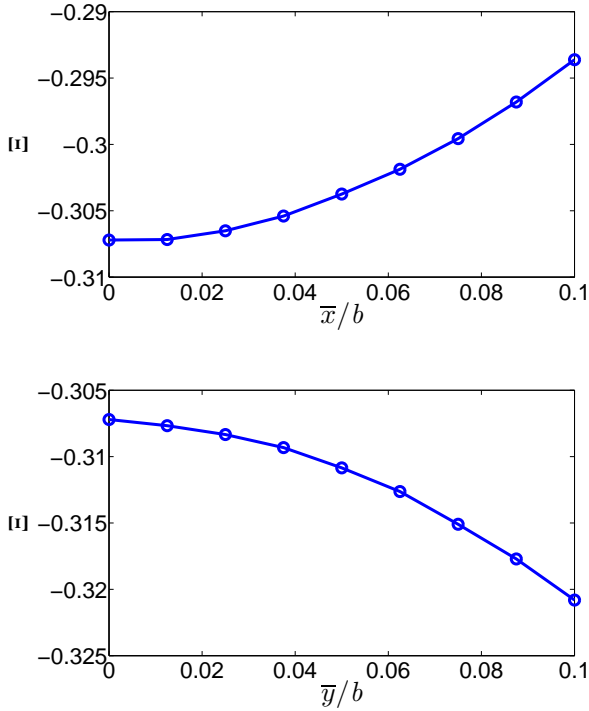


Abbildung 6.7.: Quadrupolares Signal als Funktion der Strahlablage; $\sigma_x = \sigma_y = 7.5$ mm, $b = 100.3$ mm; *oben:* $\bar{y} = 0$, *unten:* $\bar{x} = 0$.

Die obige Abbildung zeigt, dass das quadrupolare Signal auch von der Strahlposition abhängt. Mit anderen Worten, je höher die Strahlablage \bar{x} in horizontaler Richtung wird, desto höher wird Ξ . Weiterhin stellt man fest, dass je höher \bar{y} wird, desto kleiner das quadrupolare Signal wird. Aus diesen Erkenntnissen kann der untersuchte asymmetrische Strahlpositionsmonitor als quadrupolares Pick-up für den simulierten Bereich der Strahlbreiten, welche in diesem Fall den Radien des als Strahl modellierten elliptischen Zylinders entsprechen, und unter Vernachlässigung der höheren Ordnungsterme wie folgt charakterisiert werden:

$$\Xi = s \cdot \left[(\sigma_x^2 - \sigma_y^2) + n \cdot (\bar{x}^2 - \bar{y}^2) \right] - 0.3072, \quad (6.4)$$

wobei $S = 6.65 \times 10^{-5}/\text{mm}^2$ die Sensitivität des Pick-up bezüglich der Radien des elliptischen Zylinders ist und $n \approx 2$. Nun bezüglich der RMS-Strahldimensionen, welche bei elliptischen Strahlformen gleich den geometrischen Breiten der Ellipse geteilt durch Wurzel 2 ist [53, 55, 56], beträgt die Sensitivität S ungefähr $2 \cdot 6.65 \times 10^{-5}/\text{mm}^2 = 1.3 \times 10^{-4}/\text{mm}^2$.

Das Pick-up kann analog zur Gl. (6.4) auch bezüglich der *log ratio*-Methode charakterisiert werden:

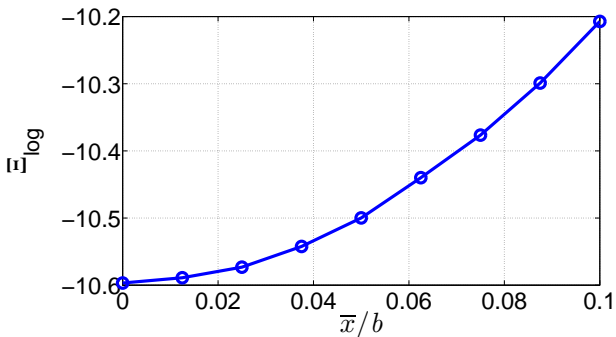
$$\Xi_{\log} = S_{\log} \cdot \left[(\sigma_x^2 - \sigma_y^2) + (n_x \cdot \bar{x}^2 - n_y \cdot \bar{y}^2) \right] - 11.026, \quad (6.5)$$

mit $S_{\log} = 25.27 \times 10^{-4} \text{ dB}/\text{mm}^2$ der Sensitivität ebenfalls bezüglich der Radien des elliptischen Zylinders.

Im ersten Teil dieses Abschnitts wurde mithilfe des elektrostatischen Löses von CST EMS festgestellt, dass das in Abb. 6.5 veranschaulichte Pick-up sensitiv zur Strahlbreite und darüber hinaus linear zu den simulierten Werten des quadrupolaren Moments ($\sigma_x^2 - \sigma_y^2$) ist. Aus diesen Erkenntnissen folgt, dass dieser Strahlpositionsmonitor als quadrupolares Pick-up mit den berechneten Sensitivitäten betrieben werden kann.

Berechnung von $\sigma_x^2 - \sigma_y^2$ mit dem elektrostatischen Löser

Die *modifizierte log ratio*-Methode wurde an diesem Modell getestet und deren Ergebnisse werden im Folgenden mit denen der traditionellen Signalverarbeitungsmethoden verglichen. Da das *log ratio*-Verfahren der Ausgangspunkt für die in dieser Arbeit entwickelte Methode ist, wird zunächst in folgender Abbildung das quadrupolare Signal bezüglich dieser Methode dargestellt.



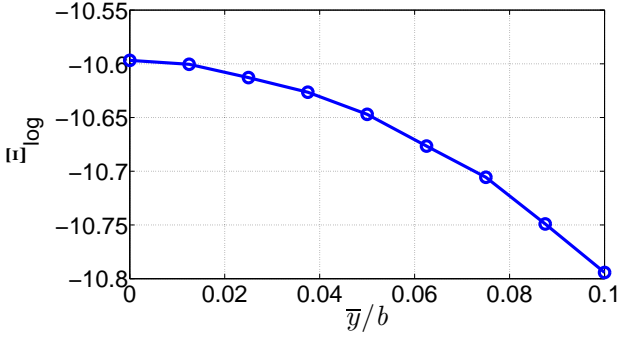


Abbildung 6.8.: Quadrupolares Signal, erhalten mit der *log ratio*-Methode, als Funktion der Strahlposition; $\sigma_x/b = 0.15$, $\sigma_y/b = 0.075$; oben: $\bar{y} = 0$, unten: $\bar{x} = 0$.

Anhand der beiden Bilder in der oben liegenden Abbildung ist deutlich erkennbar, dass im Bereich der Strahlposition \bar{x}, \bar{y} , kleiner als 5% des horizontalen Pick-up-Radius b , das quadrupolare Signal sich maximal um 1% ändert. Aus diesem Grund werden die Gewichtungsfaktoren c_x und c_y nur im Bereich von \bar{x}/b , und \bar{y}/b zwischen 0.05 und 0.1 optimiert. c_x und c_y können auch bei diesem Modell mithilfe von Gl. (5.37) bestimmt werden, nachdem die Sensitivitäten $S_{\Delta/\Sigma}$, S_{Δ_x} und S_{Δ_y} numerisch berechnet wurden. Die Optimierung von c_x und c_y wurde analog zum symmetrischen Pick-up-Modell numerisch mithilfe von CST EMS durchgeführt, wobei die im Abschnitt 5.2 beschriebene *modifizierte log ratio*-Methode verwendet wird. Das daraus resultierende quadrupolare Signal kann ausgehend von Gl. (6.5) unter Berücksichtigung des vierten Ordnungsterms folgendermaßen ausgedrückt werden:

$$\Xi_{mod} = S_{log} \cdot \left[(\sigma_x^2 - \sigma_y^2) + \underbrace{n_{x,mod} \cdot \bar{x}^2 - n_{y,mod} \cdot \bar{y}^2}_{M} + O\left(\frac{1}{b^4}, c_x, c_y\right) \right] \quad (6.6)$$

– 11.026 ,

wobei die neuen Vorfaktoren $n_{x,mod}$ und $n_{y,mod}$ die Gewichtungsfaktoren c_x bzw. c_y enthalten. Bei der Bestimmung von c_x wurde der Strahl nur entlang der horizontalen Achse bewegt, d.h. $\bar{y} = 0$. Für jeden Wert von \bar{x} wird dann ein c_x bestimmt, so

dass der Term M in Gl. (6.6) verschwindet. In folgender Abbildung werden c_x und c_y für jeweils fünf Werte der horizontalen und vertikalen Strahlblage gezeigt.

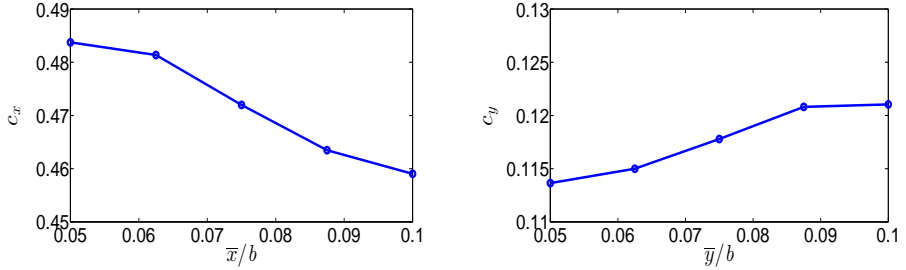
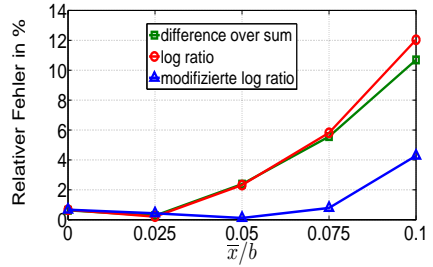
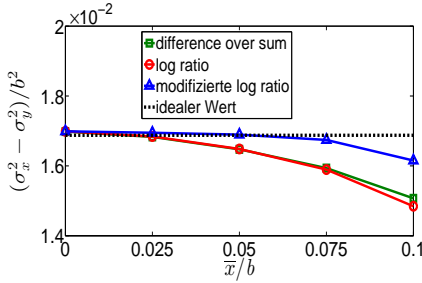


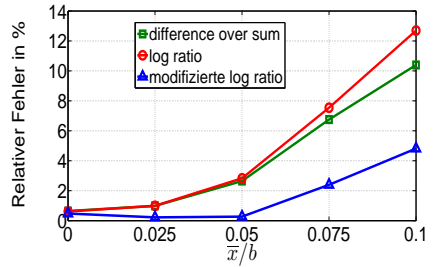
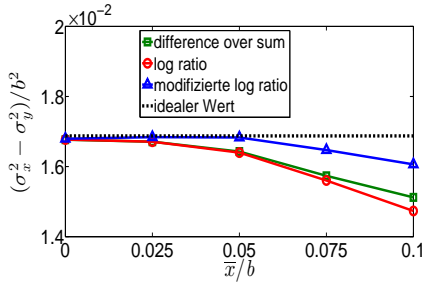
Abbildung 6.9.: Gewichtungsfaktoren c_x und c_y (Nullstellen der Funktion M in Gl. (6.6)) als Funktion der Strahlposition; $\sigma_x/\sigma_y = 2$, $\sigma_y/b = 0.075$, $b = 100.3$ mm; *links:* c_x als Funktion von \bar{x} , $\bar{y} = 0$, *rechts:* c_y als Funktion von \bar{y} , $\bar{x} = 0$.

Aus den Bildern in der obenstehenden Abbildung wurden $c_x = 0.4719$ und $c_y = 0.1177$ als arithmetische Mittelwerte aller geplotteten Gewichtungsfaktoren bestimmt.

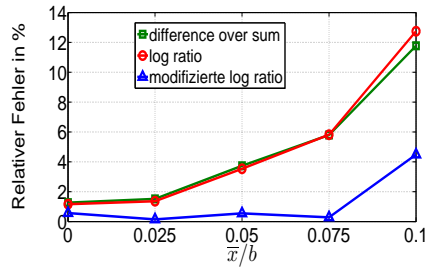
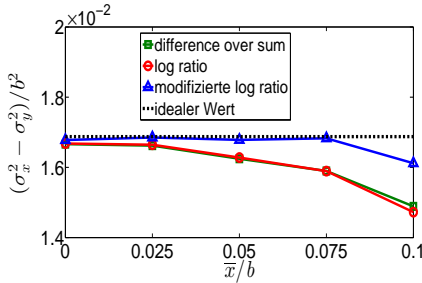
Das in Abb. 6.10 dargestellte normierte quadrupolare Moment $(\sigma_x^2 - \sigma_y^2)/b^2$ wurde mit allen drei Methoden gemäß Gln. (5.8), (5.22) und (6.6) erhalten, nachdem die an den Elektroden induzierten Spannungen U_R , U_T , U_L und U_B numerisch mit CST EMS bestimmt und in die entsprechenden Gleichungen zur Bestimmung des quadrupolaren Signals und der dipolaren Signale eingesetzt wurden. Dabei ist zu beachten, dass sich σ_x und σ_y , wie bei der Simulation des symmetrischen Pick-up-Designs im ersten Abschnitt dieses Kapitels, ebenfalls auf die geometrische Breite des Strahls beziehen, welche bei der Simulation durch die Radien eines elliptischen Zylinders repräsentiert wurden. Das zu bestimmende quadrupolare Moment bezüglich dieser Zylinderradien beträgt 1.6875×10^{-2} und ist in der nachstehenden Abbildung durch die schwarze gestrichelte Linie gekennzeichnet.



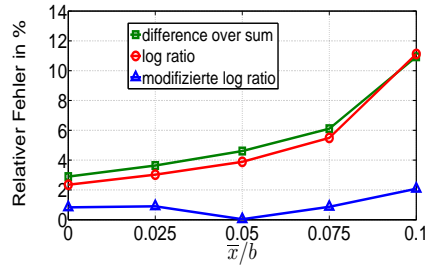
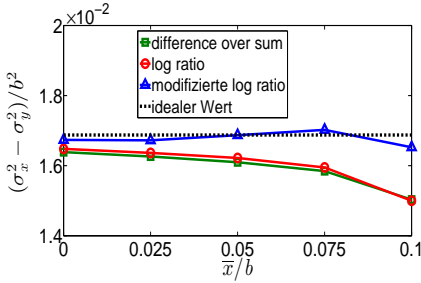
(a) $\bar{y} = 0$



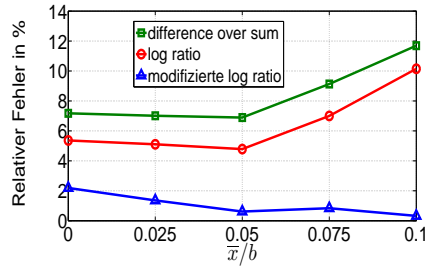
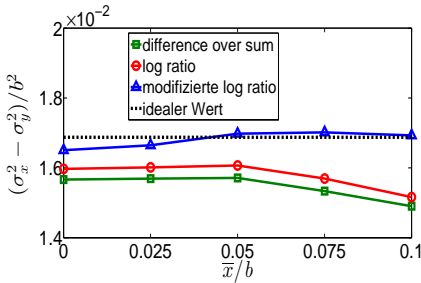
(b) $\bar{y} = 2.5 \text{ mm} \equiv \bar{y}/a \approx 0.07$



(c) $\bar{y} = 5 \text{ mm} \equiv \bar{y}/a \approx 0.14$



(d) $\bar{y} = 7.5$ mm $\equiv \bar{y}/a \approx 0.21$



(e) $\bar{y} = 10$ mm $\equiv \bar{y}/a \approx 0.28$

Abbildung 6.10.: Links: $(\sigma_x^2 - \sigma_y^2)/b^2$ als Funktion von \bar{x}/b , rechts: Absolutwert der relativen Abweichung der berechneten $(\sigma_x^2 - \sigma_y^2)/b^2$ -Werte vom idealen Wert; $\sigma_x/b = 0.15$, $\sigma_y/b = 0.075$, $c_x = 0.4719$, $c_y = 0.1177$, $a = 35.3$ mm, $b = 100.3$ mm.

Anhand der Bilder in der obigen Abbildung stellt man fest, dass für einen Strahl, der sich innerhalb des Quadranten begrenzt durch die Ebenen $x = 0$, $x = 0.1b$, $y = 0$ und $y = 0.1b$ befindet, die *modifizierte log ratio*-Methode das Quadrupolmoment mit der geringsten Abhängigkeit von der Strahlposition liefert. Die maximale relative Abweichung des berechneten quadrupolaren Moments im untersuchten Bereich der Strahlposition liegt bei der *modifizierte log ratio*-Methode bei ungefähr 5%, während diese bei den traditionellen Verfahren ca. 13% beträgt. Die große Abweichung bei den üblichen Methoden lässt sich physikalisch folgermaßen erklären: betrachtet man zum Beispiel die rechte Elektrode in Abb. 6.11, erkennt man, dass diese nicht kreisförmig, wie das bei den analytischen Untersuchungen der Fall war, sondern eine annähernde elliptische Form aufweist. Dies führt dazu, dass die Einwirkung des

elektrischen Feldes auf die Platte schon bei der Elektrodenecke anfängt, welche in der folgenden Abbildung durch den Abstand s gekennzeichnet ist.

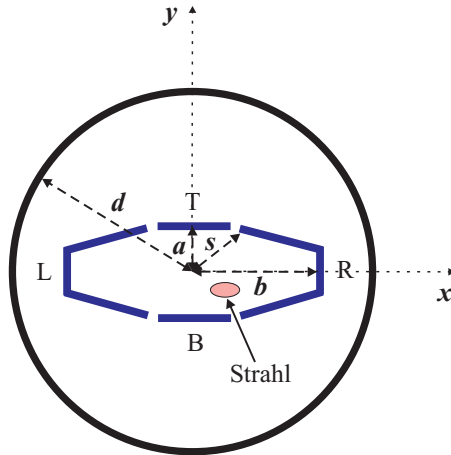
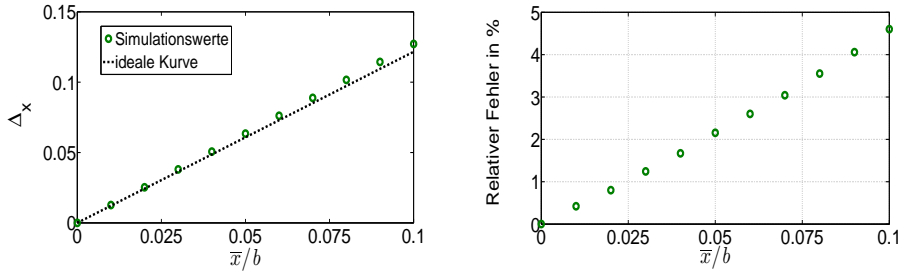
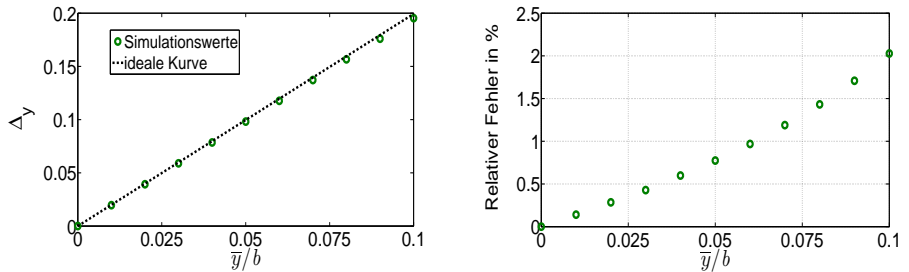


Abbildung 6.11.: Vorderansicht des Pick-up-Designs mit dem eingezeichneten Abstand s ; $a = 35.3 \text{ mm}$, $b = 100.3 \text{ mm}$, $s = 50 \text{ mm}$.

Nun für einen Wert der Strahlposition $\bar{x}/b = 0.075$ ($\bar{x} = 7.5 \text{ mm}$, $\bar{y} = 0$) zum Beispiel ergibt sich ein \bar{x}/s -Verhältnis von ungefähr 0.15. Diese Erklärung gilt auch für die vertikalen Elektroden. Für $\bar{y} = 7.5 \text{ mm}$ zum Beispiel ergibt sich ein \bar{y}/a -Verhältnis von ungefähr 0.21, welches bei den analytischen Berechnungen zu einer starken Abweichung der üblichen Methoden führt. Je höher die vertikale Koordinate der Strahlablage wird, desto höher wird wie bei der Theorie die relative Abweichung vom idealen Wert (siehe Abb. 5.9). Anders ausgedrückt führen die großen Werte von \bar{x} bzw. \bar{y} , wie bereits bei den analytischen Untersuchungen gezeigt, zu einer Nichtlinearität der dipolaren Signale in Bezug auf die Strahlposition, wie man in Abb. 6.12 sehen kann.



(a) $\bar{y}/b = 0.05$



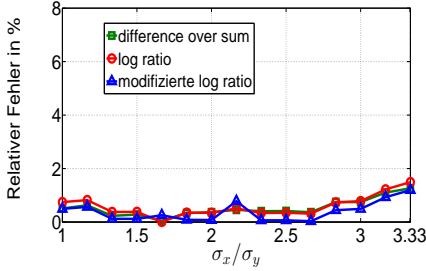
(b) $\bar{x}/b = 0.05$

Abbildung 6.12.: Simulationswerte der dipolaren Signale aus dem in Abb. 6.5 dargestellten asymmetrischen Pick-up-Modell; *oben*: horizontales dipolares Signal Δ_x und dessen Abweichung von der idealen Kurve als Funktion von \bar{x}/b , *unten*: vertikales dipolares Signal Δ_y und dessen Abweichung von der idealen Kurve als Funktion von \bar{y}/b . $\sigma_x = 15$ mm, $\sigma_y = 7.5$ mm.

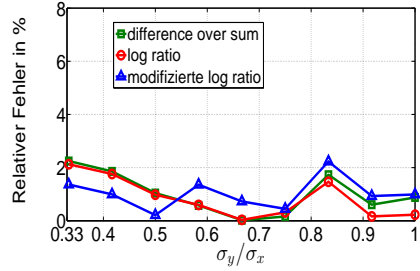
Die in der oben liegenden Abbildung dargestellten dipolaren Signale Δ_x und Δ_y wurden gemäß Gln. (5.4) und (5.6) erhalten, nachdem die Werte der Spannungen an den Elektroden numerisch mit CST EMS bestimmt wurden. Für die Simulation wurden $\sigma_x = 15$ mm und $\sigma_y = 7.5$ mm verwendet.

Im Folgenden wird nun der Vergleich aller drei Methoden für verschiedene Werte von σ_x und σ_y vorgenommen, während \bar{x} und \bar{y} konstant gehalten werden. Aus demselben Grund wie bei der Abbildung 5.8 werden hier nur die relativen Abweichungen des berechneten $(\sigma_x^2 - \sigma_y^2)/b^2$ vom idealen Wert gezeigt, welcher hier den Wert 1.6875×10^{-2} hat. Diese relative Abweichung wie die in den Abbildun-

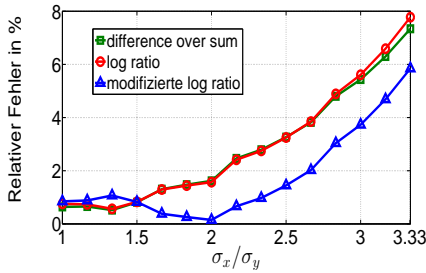
gen 5.8, 5.10, 5.11, 6.4 und 6.12 bezieht sich auf die absolute Abweichung geteilt durch den maximalen Wert der idealen Kurve.



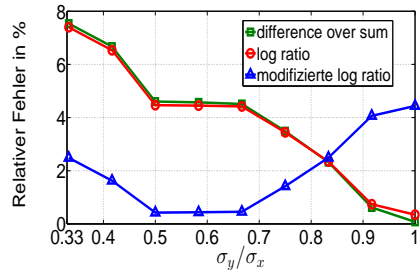
(a) $\sigma_y/b = 0.075$



(b) $\sigma_x/b = 0.15$



(c) $\sigma_y/b = 0.075$



(d) $\sigma_x/b = 0.15$

Abbildung 6.13.: Absolutwert der relativen Abweichung des quadrupolaren Moments vom idealen Wert, erhalten mit allen drei Methoden; $c_x = 0.4719$, $c_y = 0.1177$; oben: $\bar{x}/b = 0.025$, $\bar{y}/b = 0.035$; unten: $\bar{x}/b = 0.075$, $\bar{y}/b = 0.06$; $b = 100.3$ mm.

Die Bilder (a) und (b) in der obenstehenden Abbildung zeigen aufgrund des relativ kleinen Wertes der Strahlablage ($\bar{x} = 2.5$ mm, $\bar{y} = 3.5$ mm) erwartungsgemäß eine nie-drigere relative Abweichung vom idealen Wert. Im ganzen Bereich der simulierten Strahlbreiten liefern alle drei Methoden fast dasselbe Ergebnis. Bei den unteren Diagrammen ist jedoch festzustellen, dass im Bereich der Strahldimensionen für den SIS-18-Betrieb, nämlich $7.5 \text{ mm} \leq \sigma_x \leq 22.5 \text{ mm}$ und $5 \text{ mm} \leq \sigma_y \leq 11 \text{ mm}$, die *modifizierte log ratio*-Methode das bessere Ergebnis liefert.

6.2.2.2 Untersuchung des Frequenzverhaltens des Pick-up

In diesem Abschnitt wird mit dem PIC-Löser von CST PS die in Abb. 6.5 dargestellte Struktur simuliert. Das quadrupolare Signal bzw. die Sensitivität soll für den SIS-18-Betrieb im Frequenzbereich von 10 kHz bis 10 MHz untersucht werden. Dementsprechend werden alle vier Elektroden mit einem Widerstand $R = 1 \text{ M}\Omega$ abgeschlossen, um eine niedrige 3-dB-Grenzfrequenz f_g der Platten zu erzielen. Um f_g gemäß Gl. (4.17) zu berechnen, braucht man die Eigenkapazitäten der Elektroden, welche sich mit dem elektrostatischen Löser durch die Kapazitätsmatrix der gesamten Anordnung berechnen lassen können, wie im Folgenden gezeigt wird.

Berechnung der Eigenkapazitäten der Elektroden

Für die Berechnung der Kapazitätsmatrix wurden auf alle vier Platten feste Potentiale angelegt, während das Strahlrohr auf die Masse gesetzt wurde.

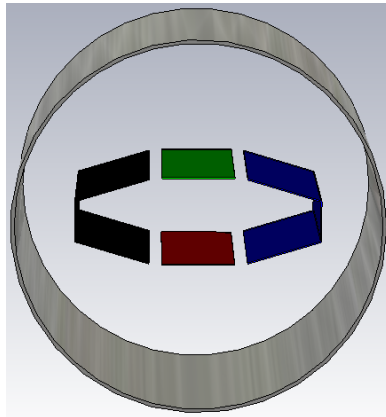


Abbildung 6.14.: Pick-up-Design zur Berechnung der Kapazitätsmatrix, aus CST EMS.

Die verschiedenen Farben auf den Elektroden in der obigen Abbildung kennzeichnen die Werte der angelegten Potentiale:

- rechte Platte R (Blau) : 1 V ,
- obere Platte T (Grün) : 2 V ,

- linke Platte L (Schwarz) : 3 V ,
- untere Platte B (Rot) : 4 V .

Die berechnete Kapazitätsmatrix der Anordnung bezüglich der Masse ist in der folgenden Tabelle zusammengefasst. Ausgehend von der Kapazitätsmatrix einer symmetrischen Anordnung (siehe Gl. (4.12)) können die Eigenkapazitäten C_R , C_T , C_L und C_B der vier Elektroden aus den positiven Werten der Diagonalen in der Tabelle 6.1 abgeleitet werden:

$$C_R = C_L = 16.4 \text{ pF} , \quad C_T = C_B = 10.3 \text{ pF} . \quad (6.7)$$

	R	T	L	B
R	16.4 pF	-3.06 pF	-0.178 pF	-3.06 pF
T	-3.06 pF	10.3 pF	-3.06 pF	-0.95 pF
L	-0.178 pF	-3.06 pF	16.4 pF	-3.06 pF
B	-3.06 pF	-0.95 pF	-3.06 pF	10.3 pF

Tabelle 6.1.: Kapazitätsmatrix des Pick-up-Designs.

Mit den Werten der Eigenkapazitäten aus Gl. (6.7) ergeben sich nun die 3-dB-Grenzfrequenzen der einzelnen Platte gemäß Gl. (4.17):

$$f_{gR,L} = \frac{1}{2\pi RC_R} = 9.7 \text{ kHz} , \quad f_{gT,B} = \frac{1}{2\pi RC_T} = 15.45 \text{ kHz} . \quad (6.8)$$

Pick-up-Design und Angeregter Strahlstrom im PIC-Löser

In Abb. 6.15 ist das mit dem PIC-Löser von CST PS entworfene Pick-up-Design gemäß den Dimensionen in Abb. 6.5 zu sehen. Die Koaxialleitungen wurden dabei so dimensioniert, dass die Leitungsimpedanz der Realität entspricht, nämlich 50 Ω , und die höheren Moden der Leitung nicht ausbreitungsfähig sind. Mit anderen Worten soll in den Koaxialkabeln nur der Grundmode, nämlich die TEM-Welle, propagiert werden.

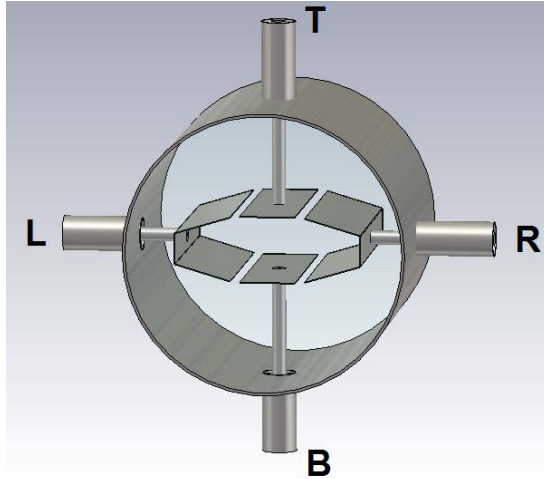


Abbildung 6.15.: Perspektivische Ansicht des Pick-up-Designs aus CST PS.

Am Ausgang jeder Platte wurden der Innen- und der Außenleiter mit einem Lumped-Element verbunden, dessen Impedanz den Wert $1\text{ M}\Omega$ besitzt. An diesen Abschlussimpedanzen werden später die Spannungssignale U_R , U_T , U_L und U_B bestimmt.

Für die Simulation wurde der in folgender Abbildung dargestellte Strahlstrom angeregt. Da das quadrupolare Signal gemäß Gl. (5.1) auf das Sum-Signal (Summe aller Elektrodensignale) normiert ist und folglich nicht von dem Strahlstrom, welcher für den SIS-18-Betrieb über 10 m lang ist, abhängt, handelt es sich hier bei diesem Strahlstrom nur um angeregte Frequenzen.

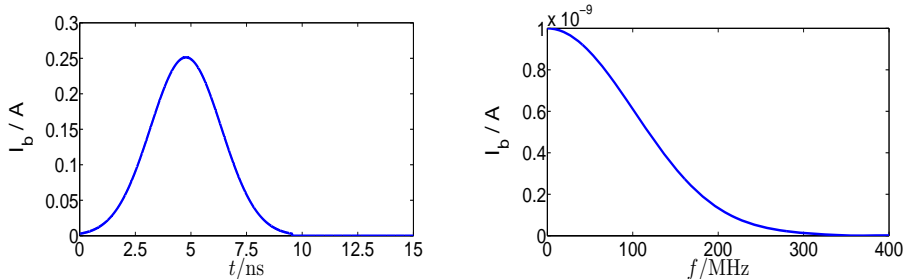


Abbildung 6.16.: Angeregter Strahlstrom I_b ; links: im Zeitbereich, rechts: im Frequenzbereich.

In den Abbildungen 6.16 und 6.17 steht t für die Zeit und f für die Frequenz. Das Bild in der folgenden Abbildung zeigt alle vier Ausgangsspannungssignale im Zeitbereich, erzeugt durch einen zentrierten Strahl der Breite $\sigma_x = 15$ mm und $\sigma_y = 7.5$ mm.

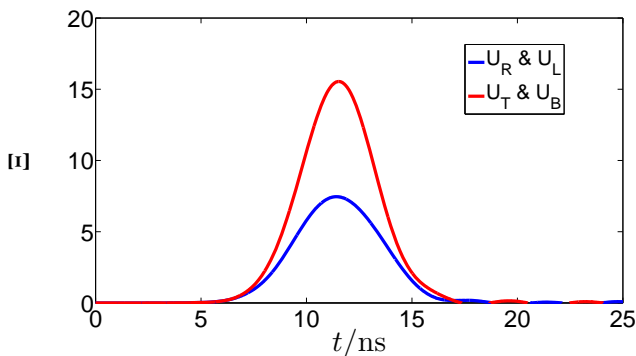


Abbildung 6.17.: Spannungssignale am Ausgang aller Elektroden als Funktion der Zeit t ; $\sigma_x = 15$ mm, $\sigma_y = 7.5$ mm, $\bar{x} = \bar{y} = 0$.

Anhand dieses Diagramms ist deutlich zu erkennen, dass die am hochohmigen Abschlusswiderstand ($1 \text{ M}\Omega$) bestimmten Spannungen erwartungsgemäß die gleiche Form haben wie der angeregte Strahlstrom (siehe Abb. 6.16). Darüber hinaus sieht man, dass die vertikalen Elektroden ebenfalls wie erwartet das Signal mit der größeren Amplitude liefern als die horizontalen Platten. Dies liegt darin, dass der vertikale Pick-up-Radius ($a = 35.3$ mm) kleiner ist als der horizontale Pick-up-Radius

($b = 100.3 \text{ mm}$).

Quadrupolares Signal im Frequenzbereich

Das quadrupolare Signal $\Xi(\omega)$ im Frequenzbereich, welches mithilfe der Amplituden der Fast Fourier transformierten Ausgangsspannungssignale bestimmt wurde, ist in der folgenden Abbildung zu sehen. Um zu vermeiden, dass die Kurven nicht übersichtlich sind, wurden in der Abbildung nur die Ergebnisse von vier Strahlbreiten gezeigt.

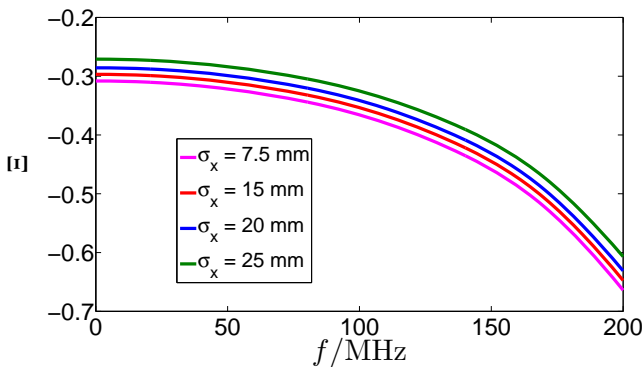


Abbildung 6.18.: Quadrupolares Signal im Frequenzbereich; $\sigma_y = 7.5 \text{ mm}$, $\bar{x} = \bar{y} = 0$.

Schaut man sich das Bild in der obigen Abbildung an, stellt man fest, dass je höher die horizontale Strahlbreite σ_x , desto höher das quadrupolare Signal im gesamten simulierten Frequenzbereich wird. Weiterhin erkennt man, dass im Frequenzbereich im Interesse der GSI, nämlich von 10 kHz bis 10 MHz, das Pick-up sich kapazitiv verhält. Mit anderen Worten hängt das quadrupolare Signal in diesem Bereich nicht von der Frequenz ab. Eine bessere Übersicht des Pick-up-Verhaltens in dem vorhin erwähnten Frequenzbereich im Interesse der GSI ist in Abb. 6.19 dargestellt, wobei dort nur die relative Abweichung des quadrupolaren Signals von dessen Wert bei 10 MHz gezeigt wurde. Der maximale Absolutwert der relativen Abweichung vom Referenzwert ($\Xi(f = 10 \text{ MHz})$) liegt unter 0.2%.

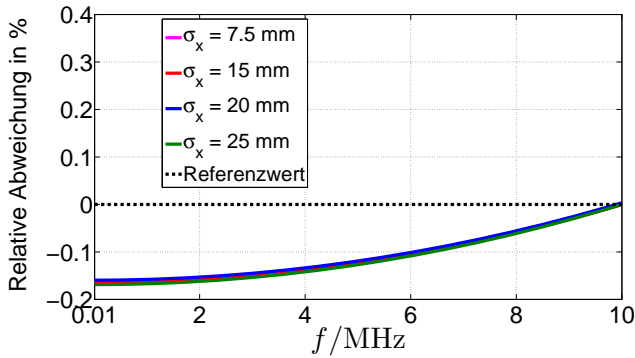
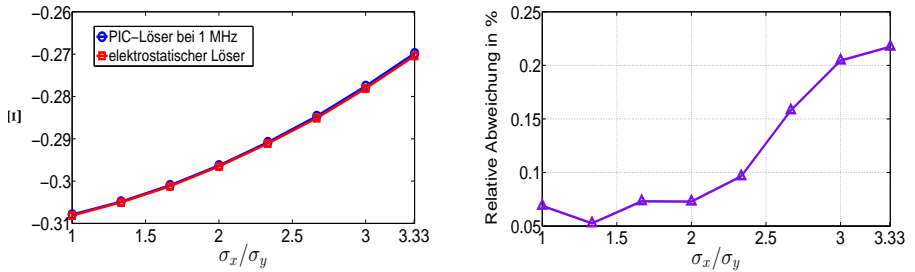
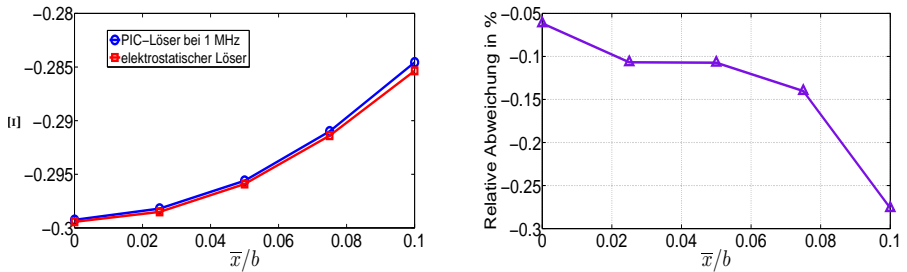


Abbildung 6.19.: Relative Abweichung des im Frequenzbereich im Interesse der GSI simulierten quadrupolaren Signals Ξ von dem Wert von Ξ ($f = 10$ MHz) ; $\sigma_y/b = 0.075$, $b = 100.3$ mm, $\bar{x} = \bar{y} = 0$.

Das quadrupolare Signal bei der Frequenz 1 MHz, berechnet mit der *difference over sum*-Methode, ist in nachfolgender Abbildung als Funktion von σ_x sowie der horizontalen Strahlposition \bar{x} dargestellt.



(a) $\sigma_y/b = 0.075$, $\bar{x} = \bar{y} = 0$



(b) $\sigma_x/b = 0.15$, $\sigma_y/b = 0.075$, $\bar{y}/b = 0.05$

Abbildung 6.20.: *Oben:* Simulationswerte von Ξ und die relative Abweichung der PIC-Löser-Werte von den Werten aus dem elektrostatischen Löser als Funktion von σ_x/σ_y , *unten:* Simulationswerte von Ξ und die relative Abweichung der PIC-Löser-Werte von den Werten aus dem elektrostatischen Löser als Funktion von \bar{x}/b ; $b = 100.3$ mm.

Das in der obenstehenden Abbildung dargestellte quadrupolare Signal Ξ wurde gemäß Gl. (5.1) berechnet, nachdem die an den Elektroden induzierten Spannungen numerisch mit CST EMS bestimmt wurden. Anhand der Abb. 6.20 (a) erkennt man eine sehr gute Übereinstimmung zwischen den PIC-Löser- und den elektrostatischen Löser-Ergebnissen. Die maximale relative Abweichung von den elektrostatischen Ergebnissen liegt bei ungefähr 0.22%, wie man auf dem rechten Bild in derselben Abbildung sehen kann. Die Sensitivität des quadrupolaren Pick-up wurde bei der Frequenz 1 MHz und wie im elektrostatischen Fall mit der Methode der linearen Regression ($R^2 = 0.9974$) bestimmt. Sie beträgt ungefähr $6.57 \times$

$10^{-5}/\text{mm}^2$, was einem Absolutwert der relativen Abweichung von der Sensitivität aus dem elektrostatischen Löser von ca. 1.1% entspricht.

Das linke untere Bild in derselben Abbildung zeigt das quadrupolare Signal Ξ als Funktion der horizontalen Strahlposition \bar{x}/b . Auch da liegen die PIC- und ES-Kurven sehr nah beieinander; die maximale relative Abweichung der PIC-Löser-Ergebnisse von denen des elektrostatischen Löser liegt dabei bei ungefähr 0.275%.

Nun zur Berechnung des quadrupolaren Moments im Frequenzbereich als Funktion der Strahlablage bezüglich der *modifizierte log ratio*-Methode können die Gewichtungsfaktoren $c_x = 0.4719$ und $c_y = 0.1177$ sowie die Sensitivität S_{\log} des Pick-up gemäß dem *log ratio*-Verfahren, berechnet mit dem elektrostatischen Löser (siehe Seiten 91 und 93), in den PIC-Löser übernommen werden. $(\sigma_x^2 - \sigma_y^2)$ würde sich dann, similar wie im elektrostatischen Fall, als das Verhältnis des modifizierten quadrupolaren Signals Ξ_{mod} im Frequenzbereich zu S_{\log} berechnen lassen.

6.2.3 Shoe-Box BPM

Das in der untenstehenden Abbildung dargestellte Shoe-Box-Pick-up-Design [5] wurde bis jetzt wie die in den Abschnitten 6.2.1 und 6.2.2 untersuchten Modelle für die Bestimmung der transversalen Strahlposition verwendet.

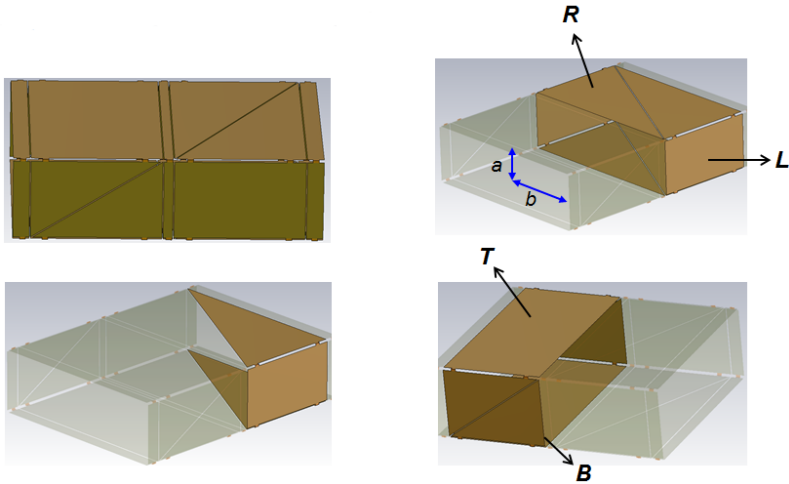


Abbildung 6.21.: Shoe-Box-Design aus mehreren perspektivischen Ansichten.

Dieses Modell soll nun als quadrupolares Pick-up untersucht werden, um herauszufinden, ob eine Sensitivität dieses Modells zur Strahlbreite vorliegt. In Abb. 6.22 ist das ebenfalls mit der *difference over sum*-Methode simulierte quadrupolare Signal gemäß Gl. (5.1) als Funktion der Strahlbreite sowie der Strahlposition zu sehen. Die Simulation wurde numerisch mit dem elektrostatischen Löser von CST EMS durchgeführt; zur Modellierung des Strahls wurde analog wie bei den beiden vorherigen Pick-ups ebenfalls ein elliptischer Zylinder benutzt.

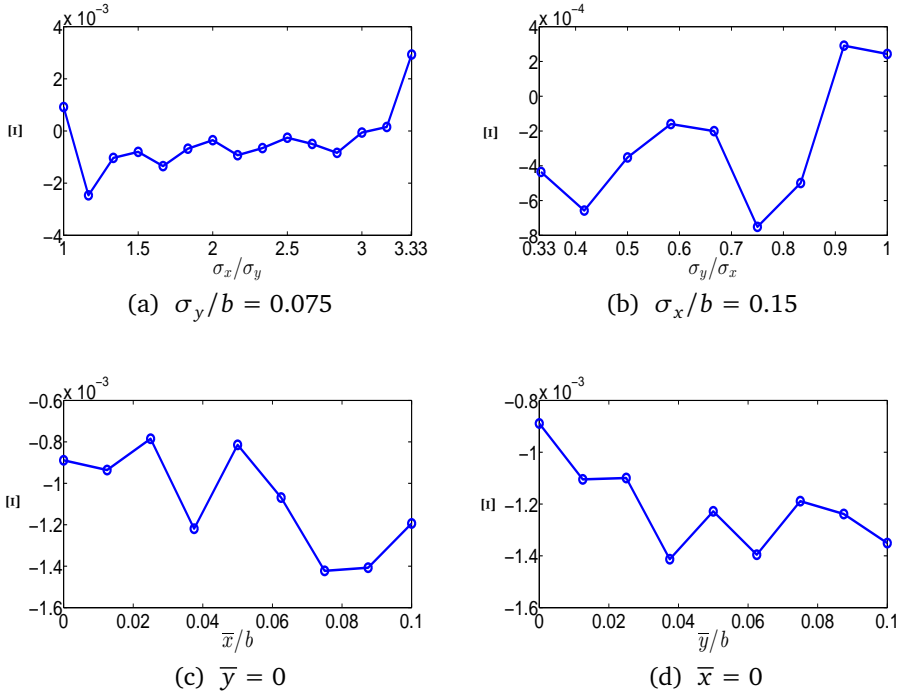


Abbildung 6.22.: Oben: Ξ als Funktion der Strahlbreite, $\bar{x} = \bar{y} = 0$, unten: Ξ als Funktion der Strahlposition, $\sigma_x/b = \sigma_y/b = 0.05$.

Betrachtet man Abb. 6.22, sieht man ganz deutlich, dass das gezeigte quadrupolare Signal weder von der Strahldimension noch von der Strahlablage abhängt. Mit anderen Worten kann man sagen, dass der sogenannte Shoe-Box-Strahlpositionsmonitor nicht sensitiv gegenüber dem quadrupolaren Moment ($\sigma_x^2 - \sigma_y^2$) ist und demzufolge nicht als quadrupolares Pick-up benutzt werden kann. Dennoch kann dieses Pick-up-Modell als hoch linearer Strahlpositionsmonitor benutzt

werden, wie das in [5] ausführlich untersucht wurde und auch in der folgenden Abbildung zu sehen ist.

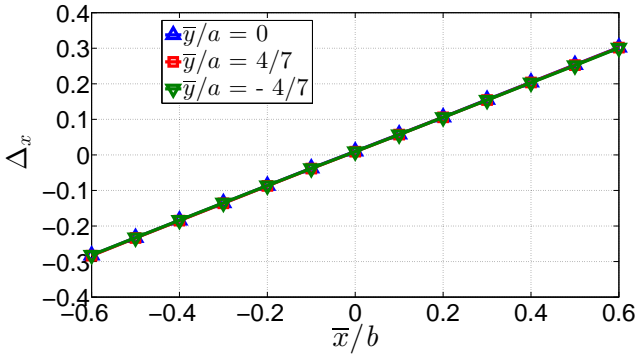


Abbildung 6.23.: Horizontales dipolares Signal Δ_x als Funktion von \bar{x}/b ; $a = 35$ mm, $b = 100$ mm.

Das Diagramm zeigt das numerisch mit dem elektrostatischen Löser von CST EMS erhaltene horizontale dipolare Signal Δ_x gemäß Gl. (6.9). $a = 35$ mm und $b = 100$ stehen jeweils für den Pick-up-Radius in vertikaler und horizontaler Achse (siehe Abb. 6.21).

$$\Delta_x = \frac{U_R - U_L}{U_R + U_L}, \quad (6.9)$$

wobei U_R und U_L die induzierten Spannungen an den rechten und linken Elektroden bezeichnen. Betrachtet man die Abbildung 3 in [5], sieht man ganz deutlich, dass das dort mit CST Microwave Studio bei der Frequenz 1 MHz berechnete dipolare Signal mit dem hier elektrostatisch berechneten Signal sehr gut übereinstimmt.

6.3 Untersuchung des Frequenzverhaltens eines realen Verstärkers

Im Abschnitt 6.2.2 wurde das in Abb. 6.5 dargestellte Pick-up-Modell ohne äußere Beschaltung simuliert. Da bei der *modifizierte log ratio*-Methode eine Gewichtung der dipolaren Signale mit den Faktoren c_x und c_y stattfindet, wurde mit dem Netzwerksimulationsprogramm CST Design Studio [43] das Frequenzverhalten eines realen Verstärkers, dessen Verstärkungsgrad gleich c_x bzw. c_y ist, untersucht. Es handelt sich bei diesem Verstärker um den Operationsverstärker AD8475 [58]

mit einem Verstärkungsgrad von 0.4. Dieser wurde sowohl für die Bestimmung der dipolaren Signale (Differenz der Signale der gegenüberliegenden Elektroden) als auch für deren Gewichtung verwendet. Ein Spice-Modell dieses OP-Verstärkers, welches in der folgenden Abbildung zu sehen ist, wurde von der Website des Herstellers (Analog Devices) heruntergeladen und in CST Design Studio importiert.

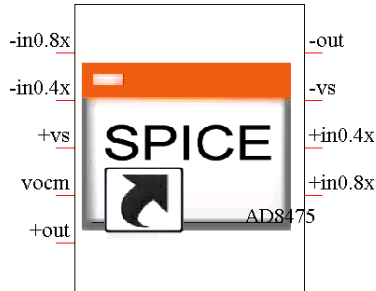


Abbildung 6.24.: Spice-Modell des OP-Verstärkers AD8475.

Die detaillierte Funktionsweise dieses Verstärkers wird in [58] ausführlich beschrieben. Die Gesamtschaltung aus CST Design Studio ist in der untenstehenden Abbildung veranschaulicht.

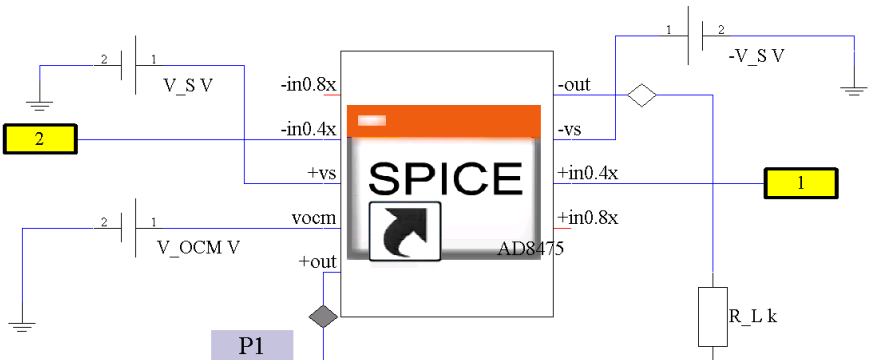


Abbildung 6.25.: Gesamtschaltung aus CST Design Studio; $V_S = 5\text{ V}$, $V_{OCM} = 2.5\text{ V}$, $R_L = 1\text{ k}\Omega$.

Als Eingangsspannungen wurden die mit dem PIC-Löser erhaltenen Ausgangsspannungssignale U_R und U_L , welche für die Strahlposition $\bar{x}/b = 0.05$ und $\bar{y}/b = 0$ berechnet wurden, in die Ports 1 bzw. 2 importiert. Da für dieses Beispiel die vertikale Ablage des Strahls gleich Null war, gab es dementsprechend nur eine Gewichtung des horizontalen dipolaren Signals. Die horizontalen Ausgangssignale an den Elektrode R und L (siehe Abb. 6.5) sind in der obigen Abbildung durch die Ports 1 bzw. 2 gekennzeichnet. Zur Berechnung der Spannungssignale am Ausgang des Verstärkers wurde eine *differential* Probe P_1 an den Klemmen des Abschlusswiderstandes $R_L = 10\text{ k}\Omega$ definiert. Dieses Ausgangssignal am Widerstand R_L entspricht dem Term $c_x(U_R - U_L)$ in Gl. (5.23). Das quadrupolare Signal gemäß der *modifizierte log ratio*-Methode lässt sich analog wie in den vorherigen Abschnitten berechnen, nachdem das Ausgangsspannungssignal am R_L zu dem Eingangssignal U_1 addiert und von dem Eingangssignal U_2 am Port 2 abgezogen wurde. Die folgende Abbildung zeigt das aus der Schaltung in Abb. 6.25 erhaltene quadrupolare Signal Ξ_{mod} in einem Frequenzbereich von 0 bis 200 MHz.

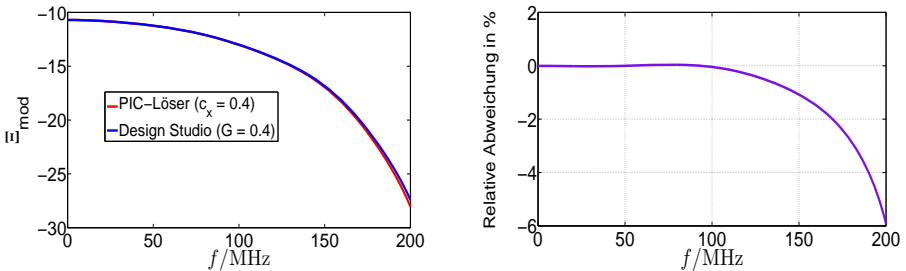


Abbildung 6.26.: Links: quadrupolares Signal bezüglich der *modifizierte log ratio*-Methode; rechts: relative Abweichung des Signals aus CST Design Studio von dem aus dem PIC-Löser.

Schaut man die obige Abbildung an, erkennt man, dass im Frequenzbereich bis ca. 100 MHz eine sehr gute Übereinstimmung zwischen den beiden Kurven vorliegt, mit einer maximalen relativen Abweichung von dem Signal aus dem PIC-Löser kleiner als 0.005%. Dies lässt sich durch den Verstärkungsgrad G des OP-Verstärkers erklären, denn laut dessen Datenblatt [58] erfolgt eine Verstärkung von 0.4 (-7.96 dB) in einem Frequenzbereich bis ungefähr 100 MHz, wie man auch in Abb. 6.27 sehen kann. Der Verstärkungsgrad G des OPVs, dargestellt in der folgenden Abbildung, wurde ebenfalls mit CST Design Studio und stimmt mit dem auf dem Datenblatt vollständig überein.

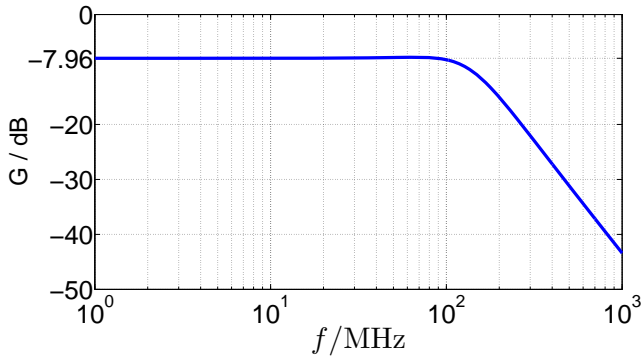


Abbildung 6.27.: Verstärkungsgrad G des benutzten OP-Verstärkers AD8475 als Funktion der Frequenz, erhalten mit CST Design Studio; $V_S = 5$ V, $V_{OCM} = 2.5$ V, $R_L = 1$ k Ω .

In diesem Abschnitt wurde mit dem Netzwerksimulator CST Design Studio der Einfluss eines realen OP-Verstärkers mit einem Gewinn $G = 0.4$, welcher äquivalent zum Gewichtungsfaktor c_x in Abb. 5.1 ist, auf das quadrupolare Signal untersucht. Die Simulation mit dem OPV AD8475 war nur ein Beispiel, um zu zeigen, wie die im Abschnitt 5.2 eingeführten Gewichtungsfaktoren c_x und c_y praktisch realisiert werden können. Die Auswahl eines geeigneten Verstärkers hängt von mehreren Parametern ab, unter anderem dem Frequenzbereich, in dem das quadrupolare Signal gemessen werden soll, den Werten der Gewichtungsfaktoren c_x und c_y , den Werten der Ausgangsspannungen an allen vier Elektroden, usw..

7 Zusammenfassung und Ausblick

7.1 Zusammenfassung

In dieser Arbeit wurde eine Methode zur Berechnung des quadrupolaren Moments ($\sigma_x^2 - \sigma_y^2$) eines elektrisch geladenen Teilchenstrahls entwickelt und *modifizierte log ratio* genannt. Es handelt sich bei diesem Verfahren darum, ausgehend von der traditionellen *log ratio*-Methode und durch bestimmte Ausgangssignalkombinationen den Anteil der Strahlposition im quadrupolaren Signal und folglich im quadrupolaren Moment zu reduzieren. Eine bildliche Beschreibung der Methode ist in Abb. 5.1 veranschaulicht, wobei c_x und c_y die Gewichtungsfaktoren der dipolaren Signale in horizontaler bzw. vertikaler Ebene bezeichnen.

Analytische Untersuchungen zu diesem entwickelten Verfahren wurden im Abschnitt 5.2 des Kapitels 5 durchgeführt. Die daraus entstandenen Ergebnisse haben gezeigt, dass im untersuchten Bereich der auf dem Pick-up-Radius b normierten Strahlposition bis 0.15, die *modifizierte log ratio* im Vergleich zu den üblichen Signalverarbeitungsmethoden, nämlich der *difference over sum* und der *log ratio*, eine Strahlelliptizität mit der geringsten Abhängigkeit von der Strahlablage liefert, wie man in den Abbildungen 5.9 und 5.11 sehen kann. Dies lässt sich dadurch erklären, dass je höher \bar{x} bzw. \bar{y} wird, desto höher der Anteil des vierten Ordnungsterms bei der Bestimmung von $\sigma_x^2 - \sigma_y^2$ gemäß den üblichen Methoden wird. Bei der *modifizierte log ratio*-Methode hingegen kann durch die Variation von c_x und c_y der Anteil des vierten Ordnungsterms beeinflusst werden, da dieser (vierter Ordnungsterm) auch von diesen Gewichtungsfaktoren abhängt. Der entscheidende Vorteil dieser Methode liegt darin, dass man frei wählbare Bereiche der Strahlposition durch geeignete Gewichtungsfaktoren c_x und c_y optimieren kann.

Numerische Untersuchungen mit dem elektrostatischen Löser des 3D Feldsimulators CST EMS wurden ebenfalls durchgeführt. Zunächst wurde ein symmetrisches quadrupolares Pick-up mit den gleichen Parametern wie bei den analytischen Untersuchungen simuliert und die dabei herausgekommenen Ergebnisse stimmten vollständig mit denen der analytischen Berechnungen überein. Des Weiteren wurde das in dieser Arbeit entwickelte Verfahren auch an einem asymmetrischen Pick-up-Design ebenfalls mit dem erwähnten elektrostatischen Löser getestet, wobei die

Gewichtungsfaktoren nicht analytisch, sondern numerisch bestimmt wurden. Aus den Simulationsergebnissen dieser beiden Pick-up-Arten, wurde festgestellt, dass die *modifizierte log ratio*-Methode Ergebnisse mit der geringsten Abhängigkeit von der Strahlposition liefert. Bei der asymmetrischen Pick-up-Struktur zum Beispiel ergab sich bei der *modifizierte log ratio*-Methode eine maximale relative Abweichung des berechneten quadrupolaren Moments vom idealen Wert von ungefähr 5%, während diese bei den traditionellen Verfahren ca. 13% betrug (siehe Abb. 6.10). Aufgrund ihrer geringeren Abhängigkeit von der Strahlposition kann diese Methode in der Praxis zur Bestimmung der transversalen Strahlemittanz sehr gut geeignet sein.

Alle Simulationen bezüglich des *modifizierte log ratio*-Verfahrens wurden bis jetzt ohne äußere Beschaltung durchgeführt, d.h. die Verstärker mit den Faktoren c_x und c_y wurden ideal betrachtet. Nun wurde im Abschnitt 6.3 der asymmetrische Strahlpositionsmonitor mit einem äußeren Operationsverstärker vom Typ AD8475 [58] beschaltet, um den Effekt von dessen Rauschsignalen auf die Ergebnisse zu untersuchen. Dieser OP-Verstärker hat einen Verstärkungsgrad G von 0.4 und konnte daher gleichzeitig zur Differenzbildung der Signale der gegenüberliegenden horizontalen Elektroden und zur Gewichtung des aus dieser Differenzbildung entstandenen Signals (mit $G = c_x$) eingesetzt werden. Das mit CST Design Studio simulierte Design lieferte Ergebnisse, die mit denen ohne äußere Beschaltung (PIC-Löser-Ergebnisse) sehr gut übereinstimmten, denn der maximale relative Fehler im Frequenzbereich bis ca. 100 MHz lag bei ungefähr 0.005%.

Weiterhin wurde im Anhang A.3 die in dieser Arbeit entwickelte Methode an einem magnetischen Pick-up-Design getestet und deren Ergebnisse wurden ebenfalls mit denen traditioneller Methoden verglichen. Auch bei dieser Pick-up-Art lieferte die *modifizierte log ratio* bessere Ergebnisse als die üblichen Verfahren, wie man in Abb. A.6 sehen kann.

Im zweiten Teil dieser Arbeit wurden zwei Pick-up-Modelle, nämlich das asymmetrische Pick-up [4] im GSI SIS-18 und das sogenannte Shoe-Box [5], numerisch mit CST EMS und CST PS untersucht. Diese beiden Strukturen wurden bis jetzt, wie bereits in der Einleitung erwähnt, zur Bestimmung der Strahlblage benutzt und dafür konstruiert und würden in Zukunft auch als quadrupolare Pick-ups zur Beobachtung der Schwingungen der Strahlbreite eingesetzt werden. Da für den typischen SIS-18-Betrieb der Strahl lang gegenüber den Abmessungen der Messelektroden der zu untersuchenden Pick-ups ist, wurden diese (Pick-ups) zunächst elektrostatisch mit dem elektrostatischen Löser von CST EMS simuliert, um zu sehen, ob sie überhaupt sensitiv in Bezug auf die Strahldimension sind. Der entscheidende Vorteil dieses Löses gegenüber dem PIC-Löser von CST PS ist die wesentlich geringere Simulationszeit.

Zur Modellierung des Strahls wurde ein elliptischer Zylinder der Materie PEC (Perfect Electric Conductor) verwendet und ein Potential von 1 V wurde auf dessen Oberfläche angelegt. Die transversalen Dimensionen des Strahls variierten im Bereich $7.5 \text{ mm} \leq \sigma_x \leq 25 \text{ mm}$, $5 \text{ mm} \leq \sigma_y \leq 15 \text{ mm}$ und die Strahlablage in beiden transversalen Ebenen im Bereich zwischen 0 und 10 mm. Die Simulationsergebnisse dieser beiden Strukturen haben gezeigt, dass das asymmetrische Modell sensitiv gegenüber den untersuchten Strahlbreiten ist und dessen Sensitivität $S = 6.65 \times 10^{-5} \text{ (1/mm}^2\text{)}$ wurde mit der Methode der linearen Regression mit einem Determinationskoeffizient R^2 von 0.997 berechnet. Was die Shoe-Box-Struktur angeht, so wurde ebenfalls anhand der Ergebnisse der Simulation festgestellt, dass sie nicht sensitiv gegenüber den untersuchten Strahldimensionen ist und dementsprechend nicht als quadrupolares Pick-up verwendet werden kann.

Da sich das mit dem elektrostatischen Löser simulierte asymmetrische Pick-up-Modell als sensitiv und sogar linear gegenüber dem Quadrupolmoment des Strahls erwiesen hatte, wurde es dann mit dem PIC-Löser simuliert, um dessen Frequenzverhalten zu untersuchen. Dabei stellte sich heraus, dass das Pick-up im Frequenzbereich im Interesse der GSI, nämlich $10 \text{ kHz} \dots\dots 10 \text{ MHz}$, ein kapazitives Verhalten mit einem maximalen Absolutwert der relativen Abweichung des in diesem Frequenzbereich simulierten quadrupolaren Signals Ξ von dem Wert von Ξ ($f = 10 \text{ MHz}$) unter 0.2% aufweist. Mit anderen Worten kann man sagen, dass das quadrupolare Signal im erwähnten Frequenzbereich konstant ist. Wie beim elektrostatischen Löser wurde auch beim PIC-Löser das quadrupolare Signal bei der Frequenz 1 MHz als Funktion der Strahldimension dargestellt. Eine sehr gute Übereinstimmung mit den elektrostatischen Ergebnissen lag vor, wie man in Abb. 6.20 sehen kann. Die maximale relative Abweichung von den elektrostatischen Löser-Ergebnissen lag bei ungefähr 0.22%. Dies lässt sich dadurch erklären, dass das quadrupolare Signal bei 1 MHz bestimmt wurde, was einer Freiraumwellenlänge von 300 m entspricht und viel größer als die Elektrodenlänge ist. Die Pick-up-Sensitivität wurde ebenfalls mit dem PIC-Löser bei der Frequenz 1 MHz berechnet und beträgt $6.57 \times 10^{-5} \text{ (1/mm}^2\text{)}$; sie weicht um ca. 1.1% von dem Wert des elektrostatischen Löses ab. Ist diese berechnete Sensitivität groß genug, um mit diesem Pick-up in der Praxis quadrupolare Signale beobachten zu können? Diese Frage lässt sich bejahen, denn entsprechende Messungen wurden bei der GSI durchgeführt und quadrupolare Signale konnten tatsächlich beobachtet werden, wie man in [10] sehen kann.

7.2 Ausblick

Die in dieser Arbeit entwickelte Methode wurde sowohl analytisch als auch numerisch mit CST EMS und CST PS untersucht. Dennoch wurden alle Ausgangssignale der Elektroden ideal verarbeitet, d.h. ohne Berücksichtigung der äußeren elektronischen Bauteile des *log ratio*-Verfahrens, wie zum Beispiel der niederfrequenten Filter, um nur Frequenzanteile von Interesse durchzulassen, der reellen logarithmischen Verstärker, das Übertragungskabel von den Elektroden bis zum Netzwerkanalysator usw.. Die komplette Untersuchung der Einflüsse, die diese elektronischen Teile auf die bisherigen Simulationsergebnisse haben könnten, bzw. die praktische Realisierung dieser Methode gehören zu den nächsten Herausforderungen dieses Projekts.

A Anhang

A.1 Sensitivitätsberechnung mit der Methode der linearen Regression

A.1.1 Quadrupolare Sensitivität

Alle im Kapitel 6 angegebenen Sensitivitäten wurden mit Hilfe der Methode der linearen Regression (Methode der Kleinsten Quadrate) berechnet. Die allgemeine Gleichung der gefitteten Kurve des quadrupolaren Signals sieht folgendermaßen aus:

$$\Xi = a_1 \cdot (\sigma_x^2 - \sigma_y^2) + a_2, \quad (\text{A.1})$$

wobei a_1 und a_2 die zu bestimmenden Koeffizienten sind. Diese wurden mithilfe einer Matlab-Funktion namens *Polyfit* [64] bestimmt.

Für das asymmetrische Pick-up-Modell, dargestellt in Abb. 6.5, zum Beispiel ergaben sich für die simulierten Werte von σ_x einen Wert von $a_1 = 6.65 \times 10^{-5}/\text{mm}^2$ und $a_2 = -0.3072$. Die folgende Abbildung zeigt die Simulationswerte von Ξ bezüglich der *difference over sum*-Methode sowie die an diese Werte gefittete Kurve.

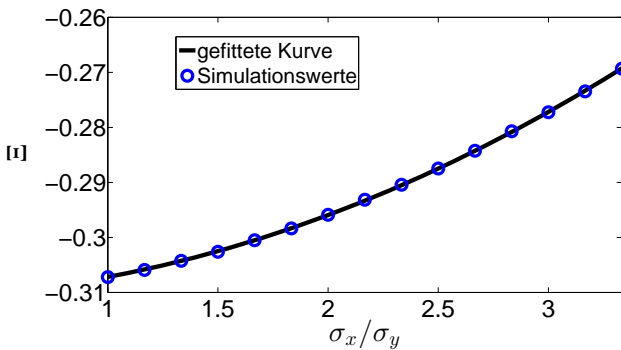


Abbildung A.1.: Gefittetes quadrupolares Signal aus dem asymmetrischen Pick-up-Modell als Funktion von σ_x / σ_y ; $\sigma_y = 7.5 \text{ mm}$, $\bar{x} = \bar{y} = 0$.

Anhand dieser Abbildung sieht man deutlich, dass alle durch die blaue Farbe gekennzeichneten Simulationswerte auf der gefitteten Kurve liegen; der Regressionskoeffizient R^2 beträgt dabei 0.997. Die quadrupolare Sensitivität der in Abb. 6.1 dargestellten symmetrischen Struktur wurde ähnlich wie die der asymmetrischen Struktur bestimmt. Die Koeffizienten a_1 und a_2 betragen jeweils $7.17 \times 10^{-5}/\text{mm}^2$ und 5.6×10^{-5} . Die folgende Abbildung zeigt die gefittete Kurve sowie die Ξ -Werte der simulierten Strahlbreiten σ_x aus dem untersuchten symmetrischen Design.

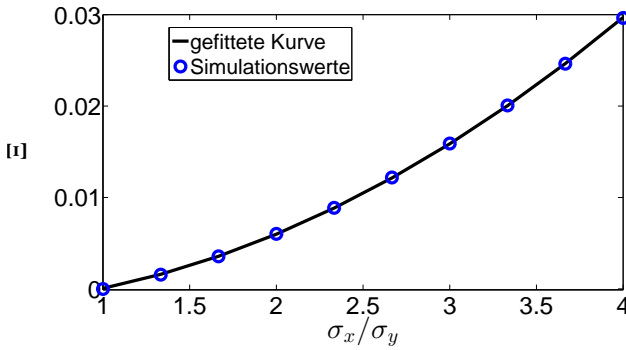


Abbildung A.2.: Gefittetes quadrupolares Signal aus dem symmetrischen Pick-up-Modell als Funktion von σ_x/σ_y ; $\sigma_y/b = 0.075$, $b = 70 \text{ mm}$, $\bar{x} = \bar{y} = 0$.

A.1.2 Dipolare Sensitivität

Zur Berechnung der dipolaren Sensitivität wurden folgende Gleichungen als Gleichungen der gefitteten Kurve verwendet:

$$\Delta_x = a_{1x} \cdot \bar{x} + a_{2x}, \quad (\text{A.2})$$

$$\Delta_y = a_{1y} \cdot \bar{y} + a_{2y}.$$

Betrachtet man Gl. (5.5) sieht man, dass bei der Bestimmung des dipolaren Signals Δ_x der sextupolare Term z_{3x} vorhanden ist. Da dieser dritte Ordnungsterm auch von $\sigma_x^2 - \sigma_y^2$ abhängt, wie man in Gl. (4.2) sehen kann, wurde bei der Simulation ein runder Strahl ($\sigma_x = \sigma_y = 0.075 \cdot b$) verwendet, um den Einfluss von z_{3x} so klein wie möglich zu halten. Die untenstehende Abbildung zeigt die durch die blaue

Farbe gekennzeichneten Simulationswerte von Δ_x sowie die daraus entstandene gefittete Kurve.

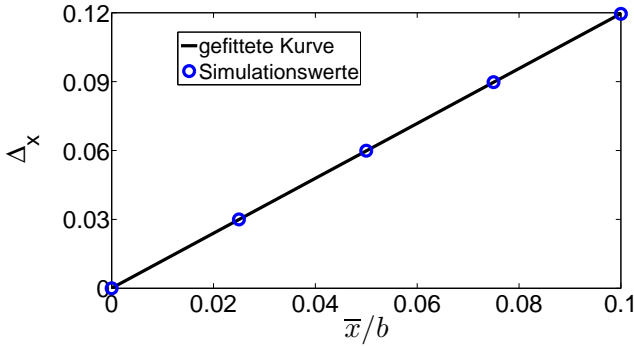


Abbildung A.3.: Gefittetes horizontales dipolares Signal aus dem symmetrischen Pick-up-Modell als Funktion von \bar{x}/b ; $\bar{y} = 0$, $\sigma_x/b = \sigma_y/b = 0.075$, $b = 70$ mm.

Anhand der obigen Abbildung ist deutlich festzustellen, dass im untersuchten Bereich der horizontalen Strahlablage die Δ_x -Werte aus der Simulation mit der gefitteten Linie sehr gut zueinander passen. Aus dem Fitting ergaben sich $a_{1x} = 1.71 \times 10^{-2}/\text{mm}$, $a_{2x} = 7.55 \times 10^{-5}$ und $R^2 = 1$. Aufgrund der Symmetrie der Anordnung sind die Koeffizienten a_{1y} und a_{2y} des vertikalen dipolaren Signals Δ_y gleich denen des horizontalen Signals Δ_x .

Die dipolaren Sensitivitäten des asymmetrischen Designs lassen sich ähnlich wie die des symmetrischen Modells bestimmen. Die folgende Abbildung zeigt die gefitteten horizontale und vertikale dipolaren Signale.

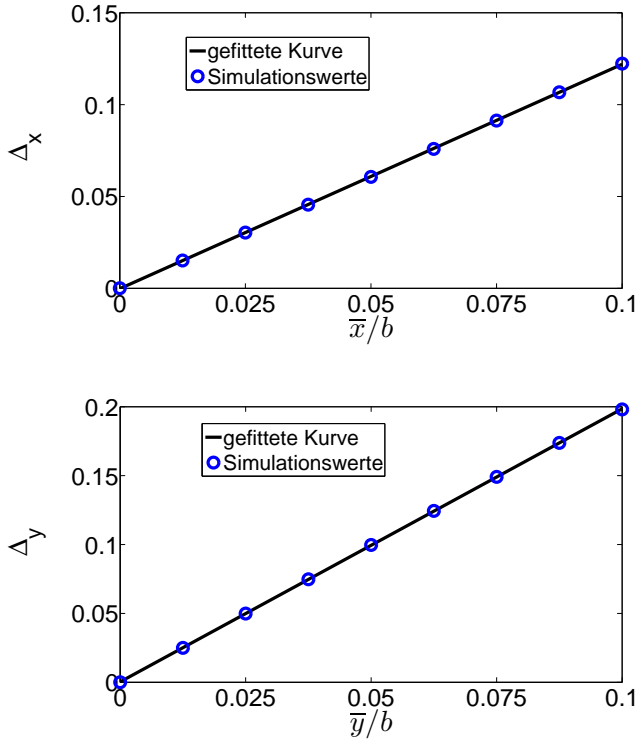


Abbildung A.4.: Gefittete dipolare Signale aus dem asymmetrischen Pick-up-Modell; $\sigma_x/b = \sigma_y/b = 0.075$, $b = 100.3$ mm; *oben:* Δ_x als Funktion von \bar{x}/b , $\bar{y} = 0$; *unten:* Δ_y als Funktion von \bar{y}/b , $\bar{x} = 0$.

Aus dem Fitting ergaben sich folgende Werte der Koeffizienten in Gl. (A.2):

$$\begin{aligned}
 a_{1x} &= 1.22 \times 10^{-2} / \text{mm} , \\
 a_{2x} &= -1.78 \times 10^{-4} , \\
 a_{1y} &= 1.98 \times 10^{-2} / \text{mm} , \\
 a_{2y} &= 3.37 \times 10^{-4} .
 \end{aligned}
 \tag{A.3}$$

Die Sensitivitäten der beiden Pick-up-Arten bezüglich der *log ratio*-Methode lassen sich analog wie die der *difference over sum*-Methode berechnen.

A.2 Numerische Berechnung der Gewichtungsfaktoren

Dieser Abschnitt widmet sich der numerischen Berechnung der Verstärkungsfaktoren c_x und c_y . Diese wurden für eine Strahlbreite von $\sigma_x/b = 0.15$ und $\sigma_y/b = 0.075$, und in einem Bereich der Strahlablage zwischen 10% und 15% des Pick-up-Radius b durchgeführt. Für jeden Wert von \bar{x}/b zum Beispiel wurde mit dem elektrostatischen Löser von CST EM Studio ein Parameter-Sweep bzw. -Optimierung von c_x in einem Bereich um den Wert des mit Gl. (5.37) analytisch berechneten c_x durchgeführt, bis das quadrupolare Moment gemäß Gl. (5.31) gleich $(15^2 - 7.5^2)$ mm² wird. Mit anderen Worten wurde ein Parameter-Sweep von c_x durchgeführt, bis der Term P in Gl. (5.33) verschwindet. Dabei ist zu beachten, dass bei der Bestimmung des horizontalen Verstärkungsfaktors die vertikale Strahlposition \bar{y} zu Null gesetzt wurde. Für das symmetrische Pick-up-Modell in Abb. 6.1 zum Beispiel ergaben sich aus diesem Parameter-Sweep folgende Werte von c_x als Funktion von \bar{x} :

\bar{x}/b	c_x
0.1	0.2033
0.1125	0.2022
0.125	0.202
0.1375	0.201
0.15	0.2

Tabelle A.1.: c_x -Werte aus dem simulierten symmetrischen Pick-up-Design in Abb. 6.1.

Der optimierte horizontale Gewichtungsfaktor $c_x = 0.2017$ wurde dann als der arithmetische Wert all dieser c_x -Werte in der oberen Tabelle festgelegt.

Der vertikale Dämpfungsfaktor lässt sich analog berechnen. Dabei wurde \bar{x} zu Null

gesetzt. Aus diesem Parameter-Sweep ergaben sich für die symmetrische Struktur folgende c_y -Werte:

\bar{y}/b	c_y
0.1	0.2077
0.1125	0.2073
0.125	0.2068
0.1375	0.206
0.15	0.2055

Tabelle A.2.: c_y -Werte aus dem simulierten symmetrischen Pick-up-Design in Abb. 6.1.

Der optimierte Wert von $c_y = 0.2066$ wurde analog wie der von c_x erhalten.

A.3 Anwendung der *modifizierte log ratio*-Methode auf ein magnetisches Pick-up

A.3.1 Analytische Berechnung des quadrupolaren Signals bzw. Moments

Zunächst betrachten wir nochmal die gesamte magnetische Induktion \vec{B}_{ges} [6], erzeugt von einem Strahl im Inneren eines elektrisch leitenden Strahlrohres mit Durchmesser d :

$$\begin{aligned}
 \vec{B}_{ges} = & -i_b \frac{\mu_0}{2\pi} \left[\frac{1}{r} \vec{e}_\vartheta + \left(1 + \frac{r^2}{d^2} \right) \left\{ \frac{\bar{x}}{r^2} \cos(\vartheta) + \frac{\bar{y}}{r^2} \sin(\vartheta) \right\} \vec{e}_\vartheta \right. \\
 & - \left(1 - \frac{r^2}{d^2} \right) \left\{ \frac{\bar{x}}{r^2} \sin(\vartheta) - \frac{\bar{y}}{r^2} \cos(\vartheta) \right\} \vec{e}_r \\
 & + \left(1 + \frac{r^4}{d^4} \right) \left\{ \left(\frac{\sigma_x^2 - \sigma_y^2}{r^3} + \frac{\bar{x}^2 - \bar{y}^2}{r^3} \right) \cos(2\vartheta) + \frac{\bar{x} \bar{y}}{r^3} \sin(2\vartheta) \right\} \vec{e}_\vartheta \\
 & - \left(1 - \frac{r^4}{d^4} \right) \left\{ \left(\frac{\sigma_x^2 - \sigma_y^2}{r^3} + \frac{\bar{x}^2 - \bar{y}^2}{r^3} \right) \sin(2\vartheta) + \frac{\bar{x} \bar{y}}{r^3} \cos(2\vartheta) \right\} \vec{e}_r \\
 & + \left(1 + \frac{r^6}{d^6} \right) \left\{ \left(\frac{3\sigma_x^2 - 3\sigma_y^2}{r^4} + \frac{\bar{x}^2 - 3\bar{y}^2}{r^4} \right) \bar{x} \cos(3\vartheta) \right. \\
 & \left. + \left(\frac{3\sigma_x^2 - 3\sigma_y^2}{r^4} + \frac{3\bar{x}^2 - \bar{y}^2}{r^4} \right) \bar{y} \sin(3\vartheta) \right\} \vec{e}_\vartheta + \dots \left. \right]. \tag{A.4}
 \end{aligned}$$

Anhand der obigen Gleichung ist deutlich zu erkennen, dass die zu messende Größe $(\sigma_x^2 - \sigma_y^2)$ sowohl in der azimuthalen B_ϑ als auch in der radialen Komponente B_r steckt. Das quadrupolare Signal bzw. das quadrupolare Moment wird hier via die Einkopplung von B_ϑ bestimmt. Das entsprechende Pick-up-Design dafür steht in der folgenden Abbildung.

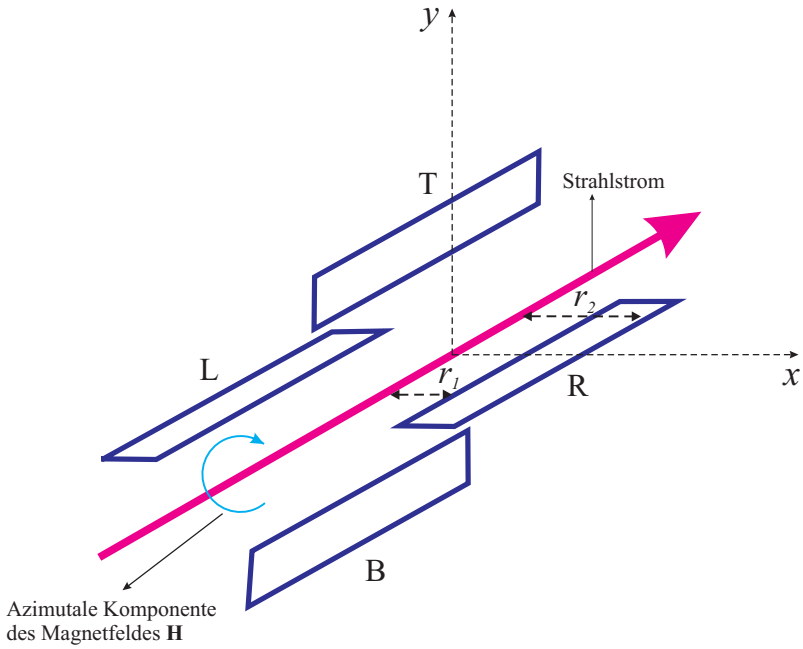


Abbildung A.5.: Magnetisches Pick-up-Design zur Einkopplung von B_θ .

Die in der rechten Leiterschleife R induzierte elektrische Spannung U_R^m wird im Folgenden berechnet und daraus werden die anderen Spannungen abgeleitet:

- **Elektrode R:** $\vartheta = 0^\circ$

$$\begin{aligned}
U_R^m &\propto -i_b \frac{\mu_0}{2\pi} \int_{r_1}^{r_2} B_{\vartheta} dr \\
&= -i_b \frac{\mu_0}{2\pi} \int_{r_1}^{r_2} \left[\frac{1}{r} + \left(1 + \frac{r^2}{d^2} \right) \frac{\bar{x}}{r^2} \right. \\
&\quad + \left(1 + \frac{r^4}{d^4} \right) \left(\frac{\sigma_x^2 - \sigma_y^2}{r^3} + \frac{\bar{x}^2 - \bar{y}^2}{r^3} \right) \\
&\quad \left. + \left(1 + \frac{r^6}{d^6} \right) \left\{ 3 \left(\frac{\sigma_x^2 - \sigma_y^2}{r^4} \right) + \frac{\bar{x}^2 - 3\bar{y}^2}{r^4} \right\} \bar{x} + \dots \right] dr \\
&= -i_b \frac{\mu_0}{2\pi} \left[\ln \left(\frac{r_2}{r_1} \right) + \bar{x} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} + \frac{r_2}{d^2} - \frac{r_1}{d^2} \right) \right. \\
&\quad + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2} + \frac{r_2^2}{d^4} - \frac{r_1^2}{d^4} \right) (\sigma_x^2 - \sigma_y^2 + \bar{x}^2 - \bar{y}^2) \\
&\quad + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_2^3} + \frac{r_2^3}{d^6} - \frac{r_1^3}{d^6} \right) \{ 3 (\sigma_x^2 - \sigma_y^2) + \bar{x}^2 - 3\bar{y}^2 \} \bar{x} \\
&\quad \left. + \dots \right] \\
&\boxed{U_R^m \propto -i_b \frac{\mu_0}{2\pi} \ln(r_2/r_1) \left[1 + p_{1x} + p_2 + p_{3x} + \dots \right]}. \quad (\text{A.5})
\end{aligned}$$

- **Elektrode T:** $\vartheta = 90^\circ$

$$U_T^m \propto -i_b \frac{\mu_0}{2\pi} \ln(r_2/r_1) \left[1 + p_{1y} - p_2 - p_{3y} + \dots \right]. \quad (\text{A.6})$$

- **Elektrode L:** $\vartheta = 180^\circ$

$$U_L^m \propto -i_b \frac{\mu_0}{2\pi} \ln(r_2/r_1) \left[1 - p_{1x} + p_2 - p_{3x} + \dots \right]. \quad (\text{A.7})$$

- **Elektrode B:** $\vartheta = 270^\circ$

$$U_B^m \propto -i_b \frac{\mu_0}{2\pi} \ln(r_2/r_1) \left[1 - p_{1y} - p_2 + p_{3y} + \dots \right], \quad (\text{A.8})$$

wobei

$$\begin{aligned} p_{1x,y} &= \frac{\bar{x}, \bar{y}}{\ln(r_2/r_1)} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} + \frac{r_2}{d^2} - \frac{r_1}{d^2} \right), \\ p_2 &= \frac{\sigma_x^2 - \sigma_y^2 + \bar{x}^2 - \bar{y}^2}{2 \ln(r_2/r_1)} \left(\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2} + \frac{r_2^2}{d^4} - \frac{r_1^2}{d^4} \right), \\ p_{3x} &= \frac{\left\{ 3 \left(\sigma_x^2 - \sigma_y^2 \right) + \bar{x}^2 - 3\bar{y}^2 \right\} \bar{x}}{3 \ln(r_2/r_1)} \left(\frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_2^3} + \frac{r_2^3}{d^6} - \frac{r_1^3}{d^6} \right), \\ p_{3y} &= \frac{\left\{ 3 \left(\sigma_x^2 - \sigma_y^2 \right) + 3\bar{x}^2 - \bar{y}^2 \right\} \bar{y}}{3 \ln(r_2/r_1)} \left(\frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_2^3} + \frac{r_2^3}{d^6} - \frac{r_1^3}{d^6} \right). \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

Schaut man nun die Gleichungen (A.5), (A.6), (A.7) und (A.8) an, stellt man fest, dass sich das normierte quadrupolare Signal Ξ analog zu dem bei den in Kapitel 5 untersuchten elektrostatischen Pick-ups bestimmen lässt.

difference over sum-Methode

$$\begin{aligned}\Xi &= \frac{(U_R^m + U_L^m) - (U_T^m + U_B^m)}{U_R^m + U_T^m + U_L^m + U_B^m} \\ &= S_{\Delta/\Sigma}^m \left(\sigma_x^2 - \sigma_y^2 + \bar{x}^2 - \bar{y}^2 \right) + \dots, \quad (\text{A.10})\end{aligned}$$

$$\text{mit } S_{\Delta/\Sigma}^m = \frac{1}{2 \ln(r_2/r_1)} \left(\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2} + \frac{r_2^2}{d^4} - \frac{r_1^2}{d^4} \right).$$

Das dipolare Signale $\Delta_{x,y}^m$ lassen sich ebenfalls analog zu denen der kapazitiven Elektroden bestimmen:

$$\begin{aligned}\Delta_x^m &= \frac{U_R^m - U_L^m}{U_R^m + U_L^m} \\ &= p_{1x} + p_{3x} = S_{\Delta_x}^m \cdot \bar{x} + p_{3x}, \\ \text{mit } S_{\Delta_x}^m &= \frac{1}{\ln(r_2/r_1)} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} + \frac{r_2}{d^2} - \frac{r_1}{d^2} \right). \quad (\text{A.11})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta_y^m &= \frac{U_T^m - U_B^m}{U_T^m + U_B^m} \\ &= p_{1y} - p_{3y} = S_{\Delta_y}^m \cdot \bar{y} - p_{3y}.\end{aligned}$$

mit $S_{\Delta_x}^m = S_{\Delta_y}^m$ aufgrund der Symmetrie der Anordnung.

Das quadrupolare Moment $(\sigma_x^2 - \sigma_y^2)$ kann wie bei den elektrostatischen Pick-up-Modellen erst bestimmt werden, nachdem die Strahlposition aus den dipolaren Signalen bestimmt und vom quadrupolaren Signal abgezogen wurde:

$$\sigma_x^2 - \sigma_y^2 = \frac{\Xi_{\Delta/\Sigma}^m}{S_{\Delta/\Sigma}^m} - \left[\left(\frac{\Delta_x^m}{S_{\Delta_x}^m} \right)^2 - \left(\frac{\Delta_y^m}{S_{\Delta_y}^m} \right)^2 \right]. \quad (\text{A.12})$$

log ratio-Methode

$$\begin{aligned} \Xi_{log}^m &= 20 \cdot \log \left(\frac{U_R^m \cdot U_L^m}{U_T^m \cdot U_B^m} \right) \\ &= S_{log}^m \left[\sigma_x^2 - \sigma_y^2 + \left(1 - \frac{(S_{\Delta_{x,y}}^m)^2}{4 S_{\Delta/\Sigma}^m} \right) (\bar{x}^2 - \bar{y}^2) \right] + \dots, \quad (\text{A.13}) \end{aligned}$$

$$\text{mit } S_{log}^m = \frac{80}{\ln(10)} \cdot S_{\Delta/\Sigma}^m.$$

Die dipolaren Signalen können wie folgt bestimmt werden:

$$\begin{aligned} \Delta_{x,log}^m &= 20 \cdot \log \left(\frac{U_R^m}{U_L^m} \right) \\ &= S_{\Delta_{x,log}}^m \cdot \bar{x} + O \left(\frac{1}{r_1^3}, \frac{1}{r_2^3} \right), \end{aligned}$$

$$\text{mit } S_{\Delta_{x,log}}^m = \frac{40}{\ln(10)} \cdot S_{\Delta_x}^m. \quad (\text{A.14})$$

$$\begin{aligned} \Delta_{y,log}^m &= 20 \cdot \log \left(\frac{U_T^m}{U_B^m} \right) \\ &= S_{\Delta_{y,log}}^m \cdot \bar{y} + O \left(\frac{1}{r_1^3}, \frac{1}{r_2^3} \right), \end{aligned}$$

wobei $S_{\Delta_{x,\log}}^m = S_{\Delta_{y,\log}}^m$.

Wie bei *difference over sum*-Methode ergibt sich hier die Strahlelliptizität wie folgt:

$$\sigma_x^2 - \sigma_y^2 = \frac{\Xi_{\log}^m}{S_{\log}^m} - \left(1 - \frac{(S_{\Delta_{x,y}}^m)^2}{4 S_{\Delta/\Sigma}^m} \right) \left[\left(\frac{\Delta_{x,\log}^m}{S_{\Delta_{x,\log}}^m} \right)^2 - \left(\frac{\Delta_{y,\log}^m}{S_{\Delta_{y,\log}}^m} \right)^2 \right]. \quad (\text{A.15})$$

modifizierte log ratio-Methode

Das quadrupolare Moment und das quadrupolare Signal Ξ_{mod}^m wurden ähnlich wie im Abschnitt 5.2.2 berechnet:

$$\sigma_x^2 - \sigma_y^2 = \frac{\Xi_{\text{mod}}^m}{S_{\log}^m}. \quad (\text{A.16})$$

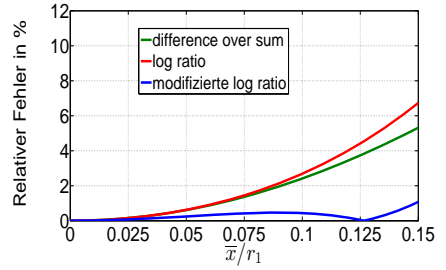
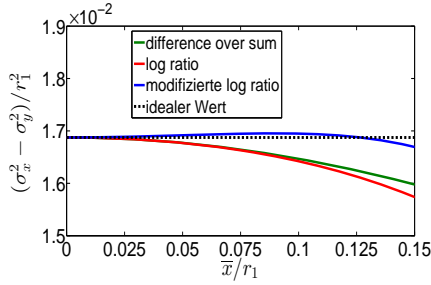
Die Gewichtungsfaktoren c_x^m und c_y^m lassen sich mithilfe der Gl. (5.37) berechnen:

$$c_x^m = c_y^m = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{S_{\Delta/\Sigma}^m}{S_{\Delta_x}^m{}^2}}. \quad (\text{A.17})$$

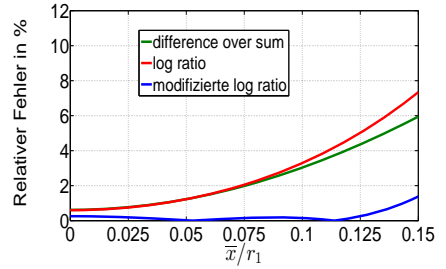
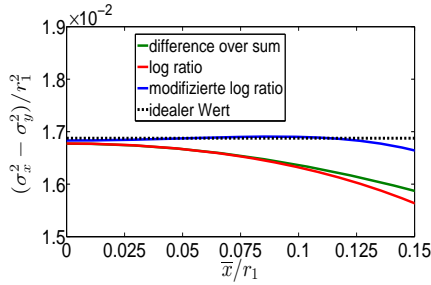
Für einen Wert von $r_1 = 62$ mm und $r_2 = 100$ mm zum Beispiel ergeben sich gemäß Gl. (A.17) die Gewichtungsfaktoren $c_x^m = c_y^m = c^m = 0.446$ und -1.446 .

A.3.2 Vergleich der Signalverarbeitungsmethoden

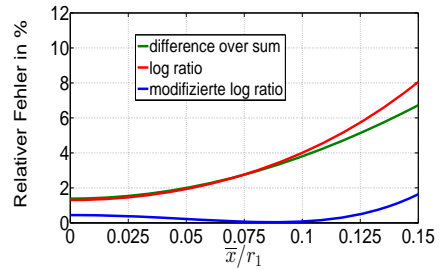
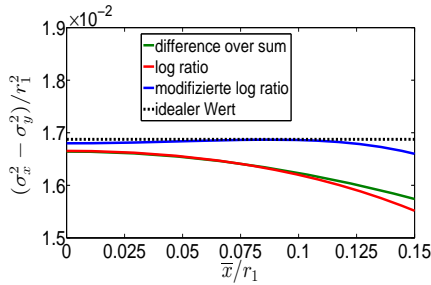
Die folgende Abbildung zeigt das mit Matlab geplottete quadrupolare Moment gemäß Gln. (A.12), (A.15) und (A.16). Für die *modifizierte log ratio*-Methode wurden die Gewichtungsfaktoren, ähnlich wie bei den elektrostatischen Pick-ups, in einem Bereich von $(\bar{x}/r_1, \bar{y}/r_1)$ zwischen 0.1 und 0.15 optimiert. Aus dieser Optimierung ergaben sich $c_x \approx 0.42$ und $c_y \approx 0.46$.



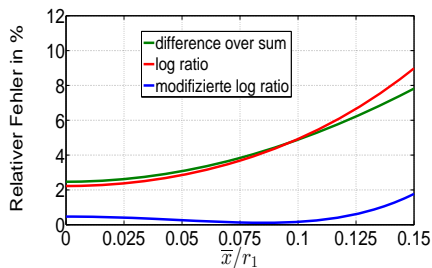
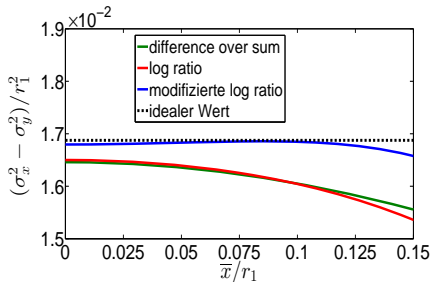
(a) $\bar{y}/r_1 = 0$



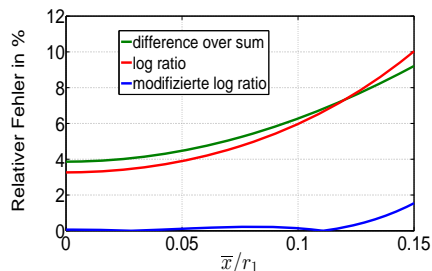
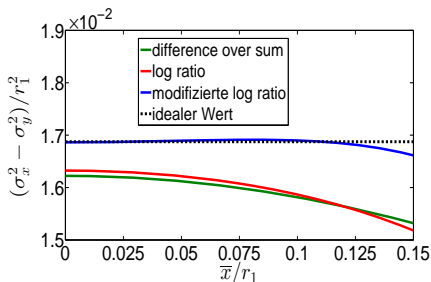
(b) $\bar{y}/r_1 = 0.05$



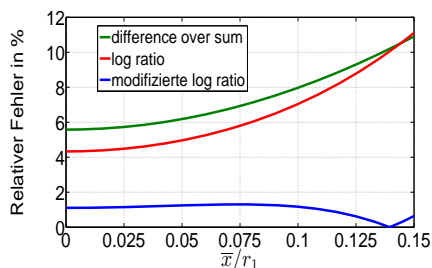
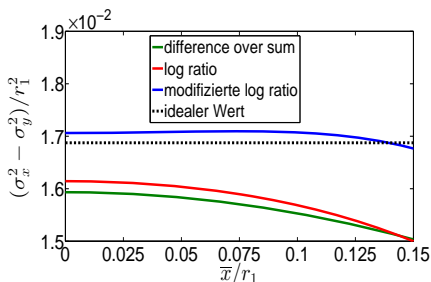
(c) $\bar{y}/r_1 = 0.075$



(d) $\bar{y}/r_1 = 0.1$



(e) $\bar{y}/r_1 = 0.125$



(f) $\bar{y}/r_1 = 0.15$

Abbildung A.6.: Links: $(\sigma_x^2 - \sigma_y^2)/r_1^2$ als Funktion von \bar{x}/r_1 , rechts: Absolutwert der relativen Abweichung des berechneten quadrupolaren Moments vom idealen Wert; $\sigma_x/\sigma_y = 2$, $\sigma_y/r_1 = 0.075$, $c_x = 0.42$, $c_y = 0.46$.

Symbolverzeichnis

Mathematik

$\frac{\partial}{\partial x}$	partielle Ableitung nach der Variablen x
$\frac{d}{dx}$	totale Ableitung nach der Variablen x
$\vec{a} \cdot \vec{b}$	Skalarprodukt der Vektoren \vec{a} und \vec{b}
$\vec{a} \times \vec{b}$	Kreuzprodukt der Vektoren \vec{a} und \vec{b}
∇	Nablaoperator
\propto	proportional zu

Elektrodynamik und Beschleunigerphysik

\vec{E}	elektrische Feldstärke
\vec{D}	elektrische Flußdichte
\vec{B}	magnetische Flußdichte
\vec{H}	magnetische Feldstärke
c	Vakuumlichtgeschwindigkeit
v	Teilchengeschwindigkeit
ϱ	elektrische Raumladungsdichte
ε	elektrische Permittivität
κ	elektrische Leitfähigkeit
μ_0	magnetische Permeabilität im Vakuum
V	elektrisches Potential
E_n, E_t	Normal- bzw. Tangentialkomponente des elektrischen Feldes
H_n, H_t	Normal- bzw. Tangentialkomponente des magnetischen Feldes
E_{kin}	kinetische Energie
U	elektrische Spannung
U_R	elektrische Spannung am Ausgang der rechten Elektrode
V_R	elektrisches Potential auf der rechten Elektrode
U_T	elektrische Spannung am Ausgang der oberen Elektrode
V_T	elektrisches Potential auf der oberen Elektrode

U_L	elektrische Spannung am Ausgang der linken Elektrode
V_L	elektrisches Potential auf der linken Elektrode
U_B	elektrische Spannung am Ausgang der unteren Elektrode
V_B	elektrisches Potential auf der unteren Elektrode
I	elektrischer Strom
Ξ	quadrupolares Signal
σ_x	RMS-Halbbreite des Strahls in der transversalen x -Richtung
σ_y	RMS-Halbbreite des Strahls in der transversalen y -Richtung
σ_z	RMS-Halbbreite des Strahls in der longitudinalen z -Richtung
S_{\log}	Sensitivität des quadrupolaren Pick-up gemäß der <i>log ratio</i> -Methode
$S_{\Delta/\Sigma}$	Sensitivität des quadrupolaren Pick-up gemäß der <i>difference over sum</i> -Methode
Δ_x	dipolares Signal in x -Richtung
Δ_y	dipolares Signal in y -Richtung
S_{Δ_x}	Sensitivität (in x -Richtung) des dipolaren Pick-up gemäß der <i>difference over sum</i> -Methode
S_{Δ_y}	Sensitivität (in y -Richtung) des dipolaren Pick-up gemäß der <i>difference over sum</i> -Methode
D_x	Dispersion-Funktion in der x -Ebene
D_y	Dispersion-Funktion in der y -Ebene
β_x	Betatronfunktion in der x -Ebene
β_y	Betatronfunktion in der y -Ebene
ϵ_x	Emittanz in der x -Ebene
ϵ_y	Emittanz in der y -Ebene
t	Zeit
f	Frequenz
ω	Kreisfrequenz ($\omega = 2\pi f$)
f_g	Grenzfrequenz
\bar{x}	horizontale Strahlposition
\bar{y}	vertikale Strahlposition
b	Pick-up-Radius

Physikalische Einheiten

m	Meter
mm	Millimeter
N	Newton
S	Siemens
A	Ampère
s	Sekunde
Hz	Hertz
V	Volt
dB	Dezibel
Ω	Ohm
pF	Pikofarad
C	Coulomb
eV	Elektronenvolt

Abkürzungen / Akronyme

Abb.	Abbildung
BPM	Beam Position Monitor (Deutsch: Strahlpositionsmonitor)
ES	Elektrostatik
Gl.	Gleichung
Gln.	Gleichungen
GSI	GSI Helmholtzzentrum für Schwerionenforschung GmbH
HF	Hochfrequenz
LINAC	Linear accelerator (Deutsch: Linearbeschleuniger)
PIC	Particle-In-Cell
RMS	Root Mean Square (Deutsch: quadratischer Mittelwert)
SIS	SchwerIonenSynchrotron
OPV	Operationsverstärker
TEM	transversal elektromagnetisch
US	United States of America (Deutsch: Vereinigte Staaten von Amerika)

Literaturverzeichnis

- [1] R. H. MILLER, J. E. CLENDENIN, et al.: „NONINTERCEPTING EMITTANCE MONITOR“, in *Proc. 12th International Conference on High Energy Accelerators* (Batavia, IL, 1983).
- [2] P. Li, B. G. Sun, Q. Luo, X. H. Wang, H. L. Xu, P. Lu: „New Methods of Measuring Emittance Using Beam Position Monitors“, in *IEEE Nuclear Science Symposium Conference Record*, S. 1675 – 1678, 2007.
- [3] CST AG: *CST EM STUDIO, CST PARTICLE STUDIO*, www.cst.com, Bad Nauheimer Str. 19, 64289 Darmstadt, Germany.
- [4] J. Latzko, P. Kowina: „Simulations of the Position Sensitivity for the SIS18 Capacitive BPM with a Nonstandard Geometry“, in *GSI scientific report* 2013.
- [5] P. Kowina, W. Kaufmann, J. Schölles, M. Schwickert: „OPTIMISATION OF SHOE-BOX TYPE BEAM POSITION MONITORS USING THE FINITE ELEMENT METHODS“, in *DIPAC 2005, Lyon, France*, S. 114 – 116.
- [6] A. Jansson: „NON-INVASIVE MEASUREMENT OF EMITTANCE AND OPTICAL PARAMETERS FOR HIGH-BRIGHTNESS HADRON BEAMS IN A SYNCHROTRON“, *Dissertation, Stockholm University, 2001*.
- [7] V. Chohan, F. Pedersen, S. van der Meer, and D.J. Williams: „Measurement of Coherent Quadrupole Oscillations at Injection into the Antiproton Accumulator“, in *Proceedings of the 2nd European Particle Accelerator Conference*, volume 1, S. 320 – 322, Nice, France, 1990.
- [8] S. J. Russell and B. E. Carlsten: „MEASURING EMITTANCE GROWTH DUE TO MAGNETIC BUNCHING OF AN ELECTRON BEAM USING THE SECOND MOMENT OF ITS IMAGE CHARGE“, in *Proceedings of the 1999 Particle Accelerator Conference*, S. 477 – 481, New York, 1999.
- [9] S. J. Russell and B. E. Carlsten: „Measuring Emittance Using Beam Position Monitors“ in *Proceedings of the 1999 Particle Accelerator Conference*, S. 477 – 481, New York, 1999.

-
- [10] R. Singh, P. Forck, P. Kowina, W. F. O. Müller, J. A. Tsemo Kamga, T. Weiland, M. Gasior: „OBSERVATIONS OF THE QUADRUPOLEAR OSCILLATIONS AT GSI SIS-18“, in *International Beam Instrumentation Conference*, Monterey, California, September 2014.
- [11] M. Chaneel: *STUDY OF BEAM ENVELOPE OSCILLATIONS BY MEASURING THE BEAM TRANSFER FUNCTION WITH QUADRUPOLEAR PICK-UP AND KICKER*, PS Division, CERN, Geneva, Switzerland.
- [12] R. Bär, I. Hofmann, P. Moritz, U. Oeftiger: „Measurement of space-charge-induced frequency shifts of quadrupolar beam oscillations in the SIS“, in *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research*, S. 460 – 463, 1998.
- [13] Douglas C. Giancoli: *Physik: Lehr- und Übungsbuch*, 3. erweiterte Auflage, Seite 1249.
- [14] Stanley Humphries, Jr.: *Principles of Charged Particle Acceleration*, University of New Mexico July, 1999.
- [15] Rüdiger Schmidt: *Einführung in die Physik der Teilchenbeschleuniger; Seite 4*, Vorlesung an der Technischen Universität Darmstadt 4 April - 8 April 2011, INSTITUT FÜR KERNPHYSIK, Technische Universität Darmstadt.
- [16] Frank Hinterberger: *Physik der Teilchenbeschleuniger und Ionenoptik*, 2. Auflage, Universität Bonn, 2007.
- [17] Wikipedia: <https://de.wikipedia.org/wiki/Linearbeschleuniger>.
- [18] <http://images.fineartamerica.com/images-medium-large/aerial-photograph-of-slac-california-david-parker.jpg>.
- [19] Wikipedia: <https://de.wikipedia.org/wiki/Ringbeschleuniger>.
- [20] Hanno Krieger: *Strahlungsquellen für Technik und Medizin*, 2. Auflage, Ingolstadt, Deutschland, 2012.
- [21] https://www.mpp.mpg.de/veranstaltungen/vorlesungen/SoSe12/SimonAstroTeilchenphysik_SS12/pdf/SS12-02.pdf.
- [22] G. Quast, M. Feindt, W. Wagner und A. Denig: *Experimentelle Teilchenphysik*, Skript nach der Vorlesung von G. Quast, M. Feindt, W. Wagner und A. Denig Zusammengefasst von Simon Honc, 20. November 2006.

-
- [23] Shaukat Khan: Skript zur Vorlesung „Einführung in die Physik der Teilchenbeschleuniger und Synchrotronstrahlungsquellen“, Shaukat Khan, TU Dortmund, Wintersemester 2010/2011, 30. September 2011.
- [24] <http://www.desy.de/~niebuhr/Vorlesung/Hannover/Vorlesung4.pdf>.
- [25] S. Y. Lee: *Accelerator Physics*, Department of Physics, Indiana University, 1999.
- [26] Jana Roß: *SIS18 Sektoren; Technische Zeichnungen und Fotografien*, GSI Darmstadt, 31.1.2008.
- [27] Juan José García Garrigós: „Development of the Beam Position Monitors for the Diagnostics of the Test Beam Line in the CTF3 at CERN“, *Dissertation, Universitat Politècnica de València, 2013*.
- [28] <http://web-docs.gsi.de/~wolle/TELEKOLLEG/KERN/PDF/beschleuniger.pdf>.
- [29] Peter Forck: *Lecture Notes on Beam Instrumentation and Diagnostics*, Gesellschaft für Schwerionenforschung GSI, Darmstadt, Germany.
- [30] Maren Eberhardt: „Messung und Korrektur der Arbeitspunkte während der Energierampe am Stretcherring von ELSA“, *Dissertation, Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn, 2010*.
- [31] J. Buon: *BEAM PHASE SPACE AND EMITTANCE*, Laboratoire de l'Accélérateur linéaire, Orsay, France.
- [32] W. A. Barletta, L. Spentzouris, E. Harms: *EMITTANCE*, U.S. Particle Accelerator School, Batavia, Illinois, USA.
<http://uspas.fnal.gov/materials/10MIT/Emittance.pdf>.
- [33] Robert E. Shafer: *BEAM POSITION MONITORING*, Los Alamos National Laboratory, Los Alamos, NM 87545.
- [34] I. N. Bronstein, K. A. Semendjajew, G. Musiol, H. Mühlig: *Taschenbuch der Mathematik*, 5. überarbeitete und erweiterte Auflage, S. 1043.
- [35] Heino Henke: *Elektromagnetische Felder; Theorie und Anwendung*, Technische Universität Berlin, 2001.

-
- [36] John Matheson: „Nonlinearities in the response of beam position monitors for the LEP spectrometer“, in *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research A* 466 (2001), S. 436 – 447, 2001.
- [37] Evgeny A. Medvedko, Stephen R. Smith: *The Logarithmic Beam Position Monitor*, Stanford Linear Accelerator Center, Stanford, CA 94309, USA.
- [38] Vismara G.: „SIGNAL PROCESSING FOR BEAM POSITION MONITORS“, in *Beam Instrumentation Workshop in Boston*, USA 8–11 may 2000.
- [39] Vismara, G.: „THE COMPARISON OF SIGNAL PROCESSING SYSTEMS FOR BEAM POSITION MONITORS“, in *DIPAC*, Chester – 16–18 May 1999.
- [40] G. Roberto Aiello, Mark R. Mills: „Log-ratio technique for beam position monitor systems“, *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research A* 346, S. 426 – 432, 1994.
- [41] F. D. Wells, J. D. Gilpatrick, R. E. Shafer and R. B. Shurter: „LOG-RATIO CIRCUIT FOR BEAM POSITION MONITORING“, in *IEEE PAC*, 1991.
- [42] CST AG: <https://www.cst.com/Products/CSTEMS/SolverElectrostatics>.
- [43] CST AG: <https://www.cst.com/Products/CSTDS>.
- [44] Sergey S. Kurennoy: „Nonlinearities and effects of transverse beam size in beam position monitors“, in *PHYSICAL REVIEW SPECIAL TOPICS - ACCELERATORS AND BEAMS* 15, 012801, S. 1 – 9, 2012.
- [45] Sergey S. Kurennoy: „Nonlinearities and Effects of Transverse Beam Size in Beam Position Monitors (revised)“, Los Alamos National Laboratory, Los Alamos, NM 87545, USA, S. 1 – 8.
- [46] Kenichi Yanagida, Shinsuke Suzuki and Hirofumi Hanaki: „Design study of beam position monitors for measuring second-order moments of charged particle beams“, in *PHYSICAL REVIEW SPECIAL TOPICS – ACCELERATORS AND BEAMS*, VOLUME 4, S. 1 – 4, 2001.
- [47] A. Jansson, L. Sjøby and D.J. Williams: „DESIGN OF A MAGNETIC QUADRUPOLE PICK-UP FOR THE CERN PS“, in *Proc. 5th European Workshop on Beam Diagnostics and Instrumentation for Particle Accelerators*, S. 108 – 110, Grenoble, France, 2001.

-
- [48] A. Jansson: „Non-invasive single-bunch matching and emittance monitor“, CERN, CH-1211 Geneva 23, Switzerland, 2008.
- [49] A. Chapman-Hatchett, A. Jansson, D.J. Williams: „A MAGNETIC QUADRUPOLE PICK-UP FOR THE CERN PS“, in *Proceedings of the 1999 Particle Accelerator Conference*, S. 2223 – 2225, New York, USA, 1999.
- [50] P. Gudewicz, E. Petit: „CAPACITIVE BEAM POSITION MONITORS AND AUTOMATIC BEAM CENTERING IN THE TRANSFER LINES OF GANIL“, in *Proceedings of the 1999 Particle Accelerator Conference*, S. 1142 – 1144, Vol.2, San Francisco, CA, USA, 1999.
- [51] Maurice Cohen-Solal: „Design, test, and calibration of an electrostatic beam position monitor“, in *PHYSICAL REVIEW SPECIAL TOPICS - ACCELERATORS AND BEAMS* 13, 032801, S. 1 – 13, 2010.
- [52] K.T. McDonald and D.P. Russell: *Methods of Emittance Measurement*, Oct. 20, 1988.
- [53] Miguel A. Furman: *Compact Complex Expressions for the Electric Field of 2-D Elliptical Charge Distributions*, LBL-34682, CBP Note 014, PEP-II/AP Note 34 – 93, Lawrence Berkeley Laboratory, MS 71-H, University of California.
- [54] Gergana Angelova Hamberg: *Beam Diagnostics*, Department of Physics and Astronomy, Uppsala University, Sweden.
- [55] M. Ben Abdillah, et al: „DEVELOPMENT OF THE BEAM POSITION MONITORS FOR THE SPIRAL2 LINAC“, in *IBIC, Tsukuba, Japan*, S. 1 – 4, 2012.
- [56] Hyung Jin Kim: *Beam-Beam Interactions*, Fermilab, MS 220, Batavia.
- [57] Peter Forck, Piotr Kowina, Dmitry Liakin: *Beam Position Monitors*, Gesellschaft für Schwerionenforschung GSI, Darmstadt, Germany.
- [58] Analog Devices: *Precision, Selectable Gain, Fully Differential Funnel Amplifier AD8475*, Rev. B.
- [59] Analog Devices: *DC-Coupled Demodulating 120 MHz Logarithmic Amplifier, AD640*, Rev. C.
- [60] S. J. Russell, J. D. Gilpatrick, J. F. Power and R. B. Shurter: „Characterization of Beam Position Monitors for Measurement of Second Moment“ in *Proceedings of the 1999 Particle Accelerator Conference*, S. 477 – 481, New York, 1999.

-
- [61] T. Suwada, N. Kamikubota, H. Fukuma, N. Akasaka, H. Kobayashi: „Stripline-type beam-position-monitor system for single-bunch electron/positron beams“, in *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research A* 440, S. 307 – 319, 1999.
- [62] Tsuyoshi Suwada: „Multipole Analysis of Electromagnetic Field Generated by Single-Bunch Electron Beams“, in *Jpn. J. Appl. Phys. Vol. 40*, S. 890 – 897, 2001.
- [63] T. Suwada: „NUMERICAL ANALYSIS OF A BEAM-ENERGY-SPREAD MONITOR USING MULTI-STRIPLINE ELECTRODES“, in *XX International Linac Conference, Monterey, California*, S. 307 – 319, 1999.
- [64] MathWorks: <http://de.mathworks.com/help/matlab/ref/polyfit.html>
- [65] Prof. Dr.-Ing. C. Stiller: *Tabelle zur Fourier-Transformation*, INSTITUT FÜR MESS- UND REGELUNGSTECHNIK, UNIVERSITÄT KARLSRUHE (TH).

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich allen danken, die in den vergangenen Jahren zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben. Insbesondere danke ich

- Herrn Prof. Dr.-Ing. Thomas Weiland für die Aufnahme am Institut für Theorie Elektromagnetischer Felder der Technischen Universität Darmstadt und die hervorragende wissenschaftliche Betreuung.
- Herrn Prof. Dr.-Ing. Harald Klingbeil, Institut für Theorie Elektromagnetischer Felder der Technischen Universität Darmstadt, für die freundliche Übernahme des Korreferats.
- Herrn Dr. phil. nat. Wolfgang F.O. Müller für die kompetente fachliche Betreuung und seine ständige Diskussions- und Hilfsbereitschaft.
- Herrn Dr. Peter Forck, Herrn Dr. Piotr Kowina, Herrn Dr.-Ing. Rahul Singh und Herrn Dr. Marcus Schwickert vom GSI Helmholtzzentrum für Schwerionenforschung GmbH für die Bereitstellung der Simulationsmodelle sowie die mit dem im SIS-18 installierten asymmetrischen Pick-up-Modell durchgeführten Messungen.
- Herrn Dr.-Ing. Wolfgang Ackermann für die vielen wertvollen Diskussionen im Bereich der Hochfrequenztechnik und Simulation von elektromagnetischen Feldern.
- meinen Kollegen und Kolleginnen am Institut für Theorie Elektromagnetischer Felder der Technischen Universität Darmstadt für die gute Zusammenarbeit sowie die gute Arbeitsatmosphäre am Institut.
- meiner Familie für die uneingeschränkte, liebevolle und vielseitige Unterstützung während meiner Promotionszeit. Ohne sie wäre diese Arbeit so nicht möglich gewesen.